Université Claude Bernard Lyon I
Licence deuxième année : Algèbre IV
Jeudi 2 avril 2015

Partiel Algèbre IV

—

Durée : 2H. Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 (Questions du cours).

1. Rappeler la définition d'une forme quadratique et la formule de polarisation.
2. Soit E un espace euclidien, $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel, $(u_1, \ldots, u_m)$ une base orthogonale de F et $x \in E$.
   Exprimer le projeté orthogonal $P_F(x)$ en termes de $u_1, \ldots, u_m$.
3. Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Soit $f\colon E \to E$ un endomorphisme et f^* son adjoint. Exprimer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*)$ en termes de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Exercice 2. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Ensuite on définit la fonction suivante :

$$q \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^2 - 2xy + 2xz + y^2 + 2yz + z^2 \end{array} \quad ,$$

On admettra que c'est une forme quadratique.

1. Déterminer la forme polaire de q, que l'on notera φ_q, ainsi que la matrice de q dans la base canonique.
   Vous pouvez utiliser toute méthode pour trouver φ_q, à condition de l'expliquer.
2. Déterminer la signature de q, son rang et son noyau.
3. Déterminer une base orthogonale pour q, que l'on notera $\mathcal{B}'$.
4. Déterminer la matrice de q dans la base $\mathcal{B}'$.

Vérifiez vos calculs !

Exercice 3. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard. Posons :

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,2,2) \\ v_2 &= (1,1,1) \\ F &= \mathrm{Vect}(v_1, v_2). \end{aligned}$$

1. Trouver une base orthonormée pour F.
2. Calculer $P_F(e_1)$, où $e_1 = (1,0,0)$.

Exercice 4.

1. Considérons les trois formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{R}^3$. Pour chacune, trouver son rang et sa signature.

$$\begin{aligned} q_1(x,y,z) &= x^2 - 4xy + 6y^2 + 4yz + 2z^2 \\ q_2(x,y,z) &= x^2 - 4xy + 6y^2 + 4yz + 3z^2 \\ q_3(x,y,z) &= x^2 - 4xy + 6y^2 + 4yz + z^2 \end{aligned}$$

2. La forme polaire de laquelle est un produit scalaire ?
   Remarquez qu'il n'est pas demandé, et il est d'ailleurs entièrement inutile, de **trouver** la forme polaire.