Fiche 1

Exercice 1 (Formes bilinéaires : exemples géométriques)

(a) Confirmer que les applications suivantes

$$b_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \longmapsto \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

$$b_2 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \longmapsto \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (x_i - x_j)(y_i - y_j)$$

$$b_3 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \longmapsto \det \begin{pmatrix} a & x_1 & y_1 \\ b & x_2 & y_2 \\ c & x_3 & y_3 \end{pmatrix}, \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \quad .$$

sont des formes bilinéaires et écrire leur matrice dans la base canonique. Sont-elles symétriques ? Antisymétriques ?

(b) Ecrire la matrice de b_2 dans la base $((1, -1, 0), (0, 1, -1), (1, 1, 1))$ de $\mathbb{R}^3$.

Commentaire : b_1 mesure l'aire du parallélogramme porté par (x_1, x_2) et (y_1, y_2), b_3 mesure le volume du parallélipipède porté par $(a, b, c), (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)$.

Exercice 2 (Formes bilinéaires : espaces de matrices) On définit l'application

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (A, B) & \longmapsto & \det(A + B) - \det(A - B) \quad . \end{array}$$

Montrer que f est une forme bilinéaire et calculer sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3 (Formes bilinéaires : polynômes) Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. Calculer la matrice dans la base $(1, X, X^2)$ de la forme bilinéaire symétrique

$$(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

Cette forme est-elle dégénérée ? Quel est son noyau ? Mêmes questions pour la forme bilinéaire

$$(P, Q) \mapsto P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

Exercice 4 (Noyaux, rangs, espaces orthogonaux) Soient b et $\overline{b}$ les formes bilinéaires symétriques et antisymétriques sur $\mathbb{R}$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement les suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les noyaux et les rangs de b et de $\overline{b}$ respectivement.
2. Calculer une base pour chacun des orthogonaux de $F = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et de $G = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ pour b et pour $\overline{b}$.