## Fiche 2

**Exercice 1 (Espaces de matrices et ses symétries)** On définit l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (A, B) & \longmapsto & \operatorname{tr}(AB) \end{array} .$$

**(a)** Montrer que $\phi$ est une forme bilinéaire, symétrique, non dégénérée.

**(b)** On notera $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé par les matrices symétriques. Montrer que la restriction de $\phi$ à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est non dégénérée.

**(c)** Déterminer l'orthogonal de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ pour $\phi$.

**Exercice 2 (Espaces de matrices et ses antisymétries)** On travaillera dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices $2\times 2$ à entrées réelles. On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. On définit l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (A, B) & \longmapsto & \operatorname{tr}({}^tAJB) \end{array}$$

**(a)** Montrer que $\phi$ est bilinéaire.

**(b)** Déterminer si $\phi$ est symétrique ou antisymétrique.

**(c)** Calculer le rang de $\phi$.

**(d)** Soit $F$ l'espace des matrices de $E$ de trace nulle. Donner une base de $F$. Déterminer $F^\perp$. Montrer que $F^\perp \subset F$.

**(e)** Soit $T$ l'espace des matrices de $E$ triangulaires supérieures. Donner une base de $T$. Calculer le rang de la restriction de $\phi$ à $T$.
Plus généralement, montrer que si $F$ est un sous-espace de dimension 3 de $E$, alors la restriction de $\phi$ à $F$ est de rang au plus 2.

**Exercice 3 (Représentations matricielles)** Soient $E$ un $\mathbb{R}$-espace de dimension $p$ et $b$ une forme bilinéaire sur $E$. Si pour une famille de $(e_1, \ldots, e_p)$ de vecteurs dans $E$, la matrice $M = (b(e_i, e_j))_{1\leq i,j\leq p}$ est inversible, montrer que $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre.

Montrer que l'énoncé réciproque est vrai si $b$ n'est pas dégénérée.

**Exercice 4 (Formes quadratiques : exemples)**

**(a)** Donner la forme polaire, le noyau et le cône isotrope des formes quadratiques

$$\begin{array}{rccc} q_1 & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y,z) & \mapsto & x^2 + y^2 - z^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} q_2 & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y,z) & \mapsto & (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \end{array} .$$

**(b)** Soit $a$ un nombre réel et

$$\begin{array}{rccc} q & : & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y,z,t) & \mapsto & ax^2 + 2axy + y^2 + 4zt - at^2 \end{array} .$$

Pour quelles valeurs de $a$, $q$ est-elle dégénérée ? On suppose $q$ dégénérée. Donner une base du noyau de $q$.

**Exercice 5 (Déterminants)** On se place dans l'espace vectoriel réel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on définit l'application

$$D \; : \; \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \det(A) \end{array} .$$

**(a)** Montrer en explicitant sa forme polaire que $D$ est une forme quadratique.

**(b)** Donner la matrice de $D$ dans la base canonique $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$. En déduire le noyau et le rang.

**(c)** Montrer que le cône isotrope de $D$ n'est pas un sous-espace vectoriel. Déterminer la plus grande dimension du sous-espace qui peut être contenu dans le cône isotrope.