
Fiche 3

Exercice 1 (Réduction de Gauss, équivalence des formes quadratiques, congruence) On se donne les formes quadratiques suivantes, toutes supposées définies sur $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} q_1(x,y,z) &= x^2+2xy+2xz+2yz \\ q_2(x,y,z) &= 2x^2-2y^2+z^2-4xy+4xz-8yz \\ q_3(x,y,z) &= xy+xz \\ q_4(x,y,z) &= 4xy-8xz+4yz \quad . \end{aligned}$$

Pour chacune de ces formes répondre aux questions suivantes :

(a) Ecrire la forme sous forme réduite.

(b) Déterminer le rang, le noyau, une base orthogonale pour la forme polaire associée.

Exercice 2 (Formes quadratiques sur les polynômes) Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus deux. On définit la fonction :

$$\begin{array}{rccl} q : & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & P''(0)P'(0)+P''(0)P(0)+P'(0)P(0) \quad . \end{array}$$

(a) Montrer que q est une forme quadratique en explicitant sa forme polaire dans la base canonique $(1,X,X^2)$.

(b) Quelles sont les valeurs de q sur les vecteurs de la base canonique.

(c) Réduire q en utilisant la méthode de Gauss.

(d) Déterminer le noyau et le rang de q ainsi que sa signature.

(e) Déterminer une base orthogonale pour q.

Exercice 3 (Réduction de Gauss, signature, noyau)
I. On définit la forme quadratique suivante :

$$\begin{array}{rccl} q : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & axy+bxz+cyz \quad , \end{array}$$

où (x,y,z) sont les coordonnées d'un point de $\mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$ et a,b,c sont trois nombres réels non nuls.

1. Réduire la forme q en utilisant la méthode de Gauss.
2. Discuter la signature de q suivant le signe de abc.

II. Voici une question que vous avez déjà rencontrée. Résolvez-la en appliquant la méthode de Gauss.

Soit a un nombre réel et

$$\begin{array}{rccl} q : & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z,t) & \mapsto & ax^2+2axy+y^2+4zt-at^2 \quad . \end{array}$$

Pour quelles valeurs de a, q est-elle dégénérée ?

Exercice 4 (Gauss et la géométrie de $\mathbb{R}^3$) On définit la forme quadratique

$$q \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^2+3y^2-4xy+2xz+2yz \end{array} .$$

(a) Déterminer la signature de q.

(b) Expliciter des vecteurs non nuls isotropes.

(c) Soit P un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. Montrer que la restriction de q à P est définie positive si et seulement si $P = u^\perp$ avec $q(u) = -1$.