Fiche 4

Exercice 1 Gauss en dimension 2) Soit q la forme quadratique dont la forme polaire a la matrice suivante dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} .$$

1. On suppose $a \neq 0$. Réduire la forme en utilisant la méthode de Gauss. Déterminer une base orthogonale.
2. On suppose maintenant $a = c = 0$. Réduire la forme en utilisant la méthode de Gauss. Déterminer une base orthogonale.

Exercice 2 (Exemples élémentaires)

1. Les formes suivantes sont-elles des produits scalaires ?
   (a) L'application $\beta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui au couple de vecteurs (u, u') associe $xx' + yy'$ si $u = (x, y)$ et $u' = (x', y')$ dans une base fixée.
   (b) L'application $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui au couple de vecteurs (u, u') associe $2xx' + 3yy' + 2xy' + 2x'y$ si $u = (x, y)$ et $u' = (x', y')$ dans une base fixée.
   (c) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit E l'espace des fonctions continues $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit $\beta : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\beta(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$.
2. Répondez à la même question que celles du point précédent pour les formes polaires des formes quadratiques de l'exercice 1 de la fiche 4.
3. Quelles sont les conditions sur $a, b \in \mathbb{R}$ pour que l'application $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\beta((x, y), (x', y')) = axx' + 2bxy' + 2bx'y + byy'$ soit un produit scalaire.
4. On notera V les nombres complexes que l'on verra comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Vérifier que $\beta : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à chaque paire de nombres complexes (α, β) associe $\mathrm{Re}(\alpha\bar{\beta})$ est un produit scalaire.

Exercice 3 (Symétries) Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. On appelle symétrie de E tout endomorphisme $s \in End(E)$ vérifiant $s^2 = id_E$.

1. Montrer que
$$E = Ker(s - id_E) \oplus Ker(s + id_E).$$
2. On suppose E euclidien. Montrer que la symétrie s est orthogonale si, et seulement si,
$$Ker(s - id_E) \perp Ker(s + id_E).$$
3. On suppose E euclidien. Pour $a \in E \setminus \{0\}$, expliciter la symétrie orthogonale $v \mapsto s(v)$ d'hyperplan fixe $a^\perp$. Trouver une base de E dans laquelle cette symétrie se représente par une matrice diagonale. Quelle est la multiplicité de -1 ?

Exercice 4 (Gram-Schmidt, exemples)
I. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel.

1. Trouver une base orthonormée pour le plan orthogonal à $(2, -3, 6)$, en d'autres termes pour $(2, -3, 6)^\perp$.
2. Montrer que (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (1, 2, 2)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 1, 0)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que e_1 soit colinéaire à u_1, et que le plan engendré par e_1 et e_2 soit égal à celui engendré par u_1, u_2.

II. Donner une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ de premier vecteur $v_1 = (1, 1, 1)$. En déduire une infinité de bases orthonormées de premier vecteur $w_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. (*Utiliser une transformation géométrique simple.*)

III. Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3.

1. Montrer que l'application

$$E \times E \to \mathbb{R} \ \ (P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

définit un produit scalaire sur E.

2. En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt, construire à partir de $(1, x, x^2, x^3)$ une base orthonormée.