## Fiche 5

**Exercice 1 (Gauss, chaque somme de carrés n'est pas réduite.)** L'application suivante définit une forme quadratique. "Clairement" sa signature est $(2, 1)$.

$$q \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & (ax + y)^2 + (by + z)^2 - (y + z)^2 \end{array}$$

Nous vous demandons quand-même d'étudier la signature de $q$ suivant les valeurs de $a$ et $b$.

**Exercice 2 (Bases orthonormées dans les espaces de polynômes)** On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ des polynômes de degré au plus 3 à coefficients réels. On munit $E$ du produit scalaire suivant :

$$\langle a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3\rangle \; = \; a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \; .$$

On définit $H = \{P \in E : P(1) = 0\}$.

1. Montrer que $H$ est un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension 3.
2. Déterminer une base orthonormée de $H$.
3. Déduire du point précédent la projection orthogonale de $X$ sur $H$ et la distance de $X$ à $H$.

**Exercice 3 (Endomorphismes de trace nulle)** On se place dans un espace euclidien $E$ de dimension finie $n$ non nulle dont on notera le produit scalaire $( \; , \; )$. On fixe un endomorphisme $u$ de $E$ de trace nulle et une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$.

**(a)** Trouver une expression générale pour l'entrée $(i, j)$ de la matrice de $u$ dans cette base. En déduire une expression pour $\mathrm{tr}(u)$.

**(b)** Montrer qu'il existe $1 \leq i \neq j \leq n$ tels que $(e_i, u(e_i)) \leq 0 \leq (e_j, u(e_j))$.
*Dans le reste de l'exercice on fixera $i$ et $j$.*

**(c)** Pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on définit $e(\theta) = (\cos\theta)e_i + (\sin\theta)e_j$. Montrer que $e(\theta)$ est de norme 1 (*il s'agit de la norme associée au produit scalaire :* $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ ).

**(d)** On définit la fonction $g : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ comme $\theta \longmapsto (e(\theta), u(e(\theta)))$. Montrer que $g$ est continue et qu'elle a une racine dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

**(e)** Montrer qu'il existe une base orthonormée de $E$ dans laquelle les entrées diagonales de la matrice qui représente $u$ sont toutes nulles.

**Exercice 4 (Applications autoadjointes)** On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire standard. On définit l'application linéaire

$$T \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, x) \end{array} \; ,$$

les coordonnées étant dans la base canonique $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $T$ est une application linéaire autoadjointe.
2. Ensuite, on remplace le produit scalaire standard par le produit dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .
3. Montrer que $T$ n'est pas autoadjointe pour ce produit scalaire.

**Exercice 5 (Adjoints : polynômes)** Soit $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2. On munit cet espace du produit scalaire

$$(P|Q) \quad = \quad \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

1. Déterminer une base orthonormée de $E$ dans cette base.
2. Pour tout $c \in \mathbb{R}$, déterminer $Q_c \in E$ tel que pour tout $P \in E$,

$$\int_{-1}^{1} P(t)Q_c(t)dt \quad = \quad P(c)$$

   pour tout $P \in E$.
3. On définit $D : E \longrightarrow E$ comme la dérivation. Déterminer son adjoint.