Université Claude Bernard (Lyon 1) 2014-2015 Printemps
UE MathIV Algèbre L2

Fiche 6

Dans toute cettte fiche le cadre de travail sera $\mathbb{R}^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ fixé muni du produit scalaire standard.

Exercice 1 (Racines carrées, cubiques... décomposition polaire)

1. Déterminer $\sqrt{A}$ où $A = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$. Combien de matrices symétriques auraient A comme carré ?
2. Donner la décomposition polaire de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que dans $\mathbb{R}^n$ toute matrice diagonalisable a une racine cubique.

Exercice 2 (Contractions) Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E. On dit que f est une **contraction** si $\|f(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$.

(a) Montrer que f est une contraction si et seulement si $|\langle f(x), y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ pour tous $x, y \in E$. En déduire que si f est une contraction, f^* l'est aussi.

(b) Supposons dans la suite que f soit une contraction. Montrer que $\ker(f - Id_E) = \ker(f^* - Id_E)$.

(c) Déduire du point précédent que $\ker(f - Id_E) \perp \mathrm{Im}(f - Id_E)$ et $E = \ker(f - Id_E) \oplus \mathrm{Im}(f - Id_E)$.

Exercice 3 (Une symétrie orthogonale des polynômes) On définit E comme le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus 3. On munit E du produit scalaire $(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt$.

1. Montrer que si $F = \mathrm{Vect}(1, X^2)$ alors $F^\perp = \mathrm{Vect}(X, X^3)$.
2. On définit l'endomorphisme

$$\begin{array}{rccl} \phi : & E & \longrightarrow & E \\ & P & \longmapsto & \phi(P)(X) = P(-X) \end{array} .$$

Montrer que ϕ est une symétrie orthogonale par rapport à F.

Exercice 4 (Rotations) On considère le sous-espace F engendré par les vecteurs $(1, 1, 2)$ et $(2, 2, 1)$ (coordonnées dans la base canonique).

(a) Déterminer une base pour $F^\perp$.

(b) Déterminer une base orthonormée pour F.

(c) Déterminer la matrice dans la base canonique d'une rotation autour de $F^\perp$.

Exercice 5 (Transformations orthogonales : exemples de symétries)

(a) Donner dans la base canonique les matrices des symétries orthogonales par rapport aux plans $x = y$ et $y = z$.

(b) Sans calcul préalable, décrire la nature géométrique de la composée de ces deux symétries.

(c) Vérifier la description du point précédent.

Exercice 6 (Transformations orthogonales : comparer les rotations et les symétries)

(a) Déterminer l'axe de la rotation suivante. Que pouvez-vous dire de son angle ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Montrer que la matrice suivante, donnée dans la base canonique, est orthogonale. Déterminer sa nature géométrique.

$$\begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 (Transformations orthogonales : symétries) On fixe deux plans dans $\mathbb{R}^3$:

$$P_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y = ax\} \quad , \quad P_b = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y = bx\} \quad .$$

On note s_a et s_b les symétries orthogonales par rapport à ces plans. Déterminer la transformation $s_b \circ s_a$. Déterminer l'image d'un élément de P_a.