
Fiche 6bis – Exercices d'entraînement

Exercice 1 (Le déterminant) On se place dans \mathbb{R}^2 . Dans la fiche 2, nous avons vu que

$$\begin{aligned} D : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto \det(A) . \end{aligned}$$

définit une forme quadratique.

1. Déterminer la signature de D .
2. Déterminer une base orthogonale.

Exercice 2 (La géométrie des matrices) On munit l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire suivant :

$$\begin{aligned} \phi : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\longmapsto \operatorname{tr}(A {}^t B) \end{aligned}$$

- (a) Déterminer une base orthonormée pour le sous-espace S des matrices symétriques.
- (b) Écrire une matrice arbitraire de E comme combinaison linéaire de ses coordonnées dans S et S^\perp .
- (c) On fixe la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base orthonormée pour A^\perp .

- (d) Déterminer pour une matrice arbitraire de E sa projection orthogonale sur A^\perp .