Fiche 7

Exercice 1 (Formes hermitiennes) On se place dans $E = \mathbb{C}^3$ que l'on munit de la forme quadratique hermitienne

$$q(x_1, x_2, x_3) \ = \ |x_1|^2 + 3|x_2|^2 + 6|x_3|^2 + i\bar{x}_1 x_2 - i x_1 \bar{x}_2 + 2i x_2 \bar{x}_3 - 2i \bar{x}_2 x_3 \quad .$$

1. Déterminer la forme hermitienne f associée à q.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
3. En appliquant la méthode de Gauss, diagonaliser q, déterminer son rang, sa signature. Déterminer une base orthogonale.
4. Répondre aux mêmes questions pour

$$q(x_1, x_2, x_3) \ = \ \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2 + i x_1 \bar{x}_3 - i \bar{x}_1 x_3 + (1+i) x_2 \bar{x}_3 + (1-i) \bar{x}_2 x_3 \quad .$$

Exercice 2 (Espaces hermitiens : un peu de géométrie.) On se place dans $E = \mathbb{C}^3$ que l'on munit de la forme hermitienne standard. On définit $F = \{(x, y, z) \in E \mid x - y + iz = 0\}$.

1. Déterminer $F^{\perp}$.
2. Déterminer dans la base canonique la matrice de la projection orthogonale sur F.
3. Trouver une base orthonormée pour F.

Exercice 3 (Espaces hermitiens, espaces euclidiens : une comparaison.) Soient E un espace hermitien de dimension finie, muni de la forme hermitienne $\langle\ ,\ \rangle$ et f un endomorphisme de E tel que $\langle f(x), x\rangle = 0$ pour tout $x \in E$.

1. Montrer que f est l'endomorphisme nul.
2. Montrer que dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire standard, la rotation d'angle $\pi/2$ est un contreexemple.

Les exercices suivants sont pris d'un examen final d'il y a quelques années. Ils vous fournissent l'occasion de réviser avec quelques nouveautés.

Exercice 4 (Espace de polynômes : un autre produit scalaire) Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels. Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on définit la forme bilinéaire

$$(P, Q) = \int_0^{\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

1. Justifier le fait qu'il s'agit d'un produit scalaire dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace des polynômes de degré $\leq n$. Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ par la procédure de Gram-Schmidt à partir de la base canonique $(1, X, X^2)$.
3. Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$. Calculer l'image de P par la projection orthogonale de $\mathbb{R}_3[X]$ sur $\mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 5 (Transformations orthogonales) On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme orthogonal.
2. Calculer la dimension du sous-espace $\{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = v\}$ de $\mathbb{R}^3$ et en déduire la nature de f.
3. Écrire f comme produit de réflexions.