Université Claude Bernard Lyon I
Licence deuxième année : Algèbre IV
Vendredi 12 mai 2017

Contrôle terminal IV

—

Durée : 2H00. Aucun document n'est autorisé

Ce sujet comporte quatre exercices
Il est fortement conseillé de vérifier les résultats des calculs

Exercice 1. Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux. Si vrai donner une preuve **courte** (moins d'un paragraphe). Si faux, donner un contre-exemple.

1. Si $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ sont orthogonales alors $A + B$ est orthogonale.
2. Si $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ sont orthogonales alors AB est orthogonale.
3. On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire standard.
   Si deux applications linéaires $f, g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sont orthogonales alors $f+g$ est orthogonale.
4. Si deux applications linéaires $f, g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sont orthogonales alors $f \circ g$ est orthogonale.

Exercice 2. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard : $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.
Posons :

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 1, 0) \\ v_2 &= (1, -2, 4) \\ F &= \mathrm{Vect}(v_1, v_2). \end{aligned}$$

1. Trouver une base orthonormée pour F.
2. La compléter en une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
3. Soit $\mathcal{B}$ la base trouvée dans la question précédente. Calculer les matrices dans la base $\mathcal{B}$ de :
   — Le projecteur orthogonal sur F (noté p_F).
   — La symétrie orthogonale par rapport à F (notée s_F).

Exercice 3. On considère la matrice suivante :

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4 & 4 & -7 \\ 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier qu'il s'agit d'une matrice orthogonale.
2. 1 est-elle une valeur propre de A ? -1 est-elle une valeur propre de A ?
3. Décrire la nature géométrique de A (rotation ou réflexion-rotation).
4. Trouver l'axe de la rotation et $\cos\theta$ où θ est l'angle de rotation.

Exercice 4.

1. On rappelle que $\mathcal{C}^1\big([0,1]\big)$ est l'espace des fonctions continûment dérivables $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Pour une telle fonction f, nous notons par f' sa dérivée.
   Posons $E = \mathcal{C}^1\big([0,1]\big)$ et
   $$\mathcal{F} = \{f \in E : f = f' + 1\}$$
   Vérifier que la fonction constante 1 appartient à $\mathcal{F}$.
   Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace affine (un sous espace affine de E). Quel est son espace directeur ?
   (Question bonus : en déterminer une base.)
2. Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ nous posons
   $$\varphi(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$
   Montrer que $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est une application affine et trouver sa partie linéaire.