Fiche 1

Exercice 1 (Exemples élémentaires)

1. Les formes suivantes sont-elles des produits scalaires ?
   (a) L'application $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui au couple de vecteurs (u, u') associe $xx' + yy'$ si $u = (x, y)$ et $u' = (x', y')$ dans une base fixée.
   (b) L'application $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui au couple de vecteurs (u, u') associe $2xx' + 3yy' + 2xy' + 2x'y$ si $u = (x, y)$ et $u' = (x', y')$ dans une base fixée.
   (c) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit E l'espace des fonctions continues $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit $\beta : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\beta(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$.
2. Quelles sont les conditions sur $a, b \in \mathbb{R}$ pour que l'application $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\beta((x, y), (x', y')) = axx' + 2bxy' + 2bx'y + byy'$ soit un produit scalaire.
3. On notera V les nombres complexes que l'on verra comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Vérifier que $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à chaque paire de nombres complexes (α, β) associe $\mathrm{Re}(\alpha\bar{\beta})$ est un produit scalaire.

Exercice 2 (D'autres exemples, orthogonalité) Les applications suivantes définissent-elles des produits scalaires sur les espaces vectoriels considérés ?

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application φ définie sur $(\mathbb{R}_n[X])^2$ par :
$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k).$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application ψ définie sur $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ par :
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \psi(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tAB).$$
3. On note $E = \mathcal{C}([-1; 1]; \mathbb{R})$ et on considère l'application définie par
$$\forall f, g \in E, \quad b(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1 - t^2)\d{t}.$$

Si oui, (et lorsque cela a un sens) préciser si la base canonique de l'espace vectoriel considéré est orthogonale pour ce produit scalaire.

Exercice 3 (Cauchy-Schwarz) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer pour tout $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$:
$$\left(\int_a^b |f(t)|dt\right)^2 \leq (b - a)\int_a^b f(t)^2 dt.$$
Préciser le cas d'égalité.

Exercice 4 (Produits scalaires complexes, les matrices)

1. Montrer que l'application $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2 \to \mathbb{C}$ définie par $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^t\overline{A} \cdot B)$ est un produit scalaire.
2. Soient $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. On note $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$. Montrer que $\langle A, B\rangle = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} \overline{a_{ij}} \cdot b_{ij}$.

Exercice 5 (Produits scalaires complexes, les polynômes) Soit $\varphi : \mathbb{C}[X]^2 \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\varphi(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{P(e^{it})}Q(e^{it})dt.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire hermitien.
2. Montrer que la base canonique de $\mathbb{C}[X]$ est une base orthonormée.

Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ et $Q = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$.

3. Calculer $\|Q\|^2$ en fonction des a_i.
4. Soit $M = \sup\{|Q(z)| \ ; \ z \in \mathbb{C}, \ |z| = 1\}$.
   Montrer que $M \geq 1$ et que : $M = 1$ if and only if $Q = X^n$.

Exercice 6 (Des complexes aux réels) Soit $(E, \langle \ , \ \rangle)$ un espace préhilbertien complexe. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x,y) = \mathrm{Re}(\langle x,y\rangle)$. Montrer que φ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

Exercice 7 () Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale dont la diagonale est constituée de $a_1, \dots, a_n$. Soit $\varphi : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(X,Y) = {}^tX \cdot A \cdot Y$. Notez que φ est à valeurs dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ mais on identifie ce dernier à $\mathbb{R}$ par un abus de notations.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les a_i pour que φ soit un produit scalaire.
2. Sous cette condition, montrer que la base canonique de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ est une base orthogonale.
3. Toujours sous la même condition, déterminer une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

Exercice 8 (Familles indépendantes infinies) On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel :

$$\forall f,g \in E, \quad \varphi(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application $h_n : t \in [0;1] \longmapsto \cos(2\pi nt)$.

1. Montrer que la famille d'applications $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer que l'espace vectoriel E n'est pas de dimension finie.