Fiche 4

Exercice 1 (Applications autoadjointes) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2. On munit cet espace du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

1. Montrer que l'application $L : P \longmapsto (1-X^2)P'' - 2XP'$ est une application auto-adjointe de E.
2. Déterminer la matrice de L dans la base canonique de E et ses valeurs propres.
3. Trouver une base chaque sous-espace propre.

Exercice 2 (Applications adjointes) Soit E un espace euclidien muni du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.
(A) Soit u un endomorphisme de E vérifiant : pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x\rangle = 0$.

1. Montrer que $u^* = -u$.
2. Montrer que l'image et le noyau de u sont supplémentaires.
3. Montrer que le rang de u est pair.

(B)

1. Montrer que si f est un endomorphisme de E et que f^* est son adjoint, alors pour tout $x \in E$, $f(x) = 0$ si et seulement si $(f^* \circ f)(x) = 0$.
2. Montrer que tout projecteur p de E, qui commute avec son adjoint, est un projecteur orthogonal.

Exercice 3 (Matrices symétriques)

1. Montrer que si A est une matrice symétrique réelle telle qu'il existe $k \geq 2$ satisfaisant $A^k = I$ (I est la matrice identité). Montrer que $k = 2$. En déduire que A est orthogonale.
2. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice dans $\mathbb{R}$. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A, alors montrer que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2$.

Exercice 4 (Applications orthogonales : propriétés élémentaires) Dans un espace euclidien E soit f un endomorphisme de E. Montrer que deux des trois propriétés suivantes entraînent la troisième :

(i) f est un endomorphisme orthogonal ;
(ii) $f \circ f = -\mathrm{Id}$
(iii) Pour tout $x \in E$, x est orthogonal à $f(x)$.

Exercice 5 (Racines carrées, cubiques... décomposition polaire)

1. Déterminer $\sqrt{A}$ où $A = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$. Combien de matrices symétriques auraient A comme carré ?
2. Donner la décomposition polaire de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que dans $\mathbb{R}^n$ toute matrice diagonalisable a une racine cubique.

Exercice 6 (Symétries) Soient E un espace vectoriel réel de dimension n et $s \in End(E)$ vérifiant $s^2 = id_E$.

1. Montrer que
$$E = Ker(s - id_E) \oplus Ker(s + id_E).$$
2. On suppose E euclidien. Montrer que s est orthogonal si, et seulement si,
$$Ker(s - id_E) \perp Ker(s + id_E).$$
3. On suppose E euclidien. Pour $a \in E \setminus \{0\}$, expliciter la symétrie orthogonale $v \mapsto s(v)$ d'hyperplan fixe $a^{\perp}$. Trouver une base de E dans laquelle cette symétrie se représente par une matrice diagonale. Quelle est la multiplicité de la valeur propre -1 ?