Université Claude Bernard (Lyon 1) 2016-2017 Printemps
UE MathIV Algèbre L2

Fiche 5

On appellera **réflexion** *tout endomorphisme f d'un espage euclidien à la fois autoadjoint et orthogonal. Forcément $f \circ f = Id$.*

Exercice 1 (Une symétrie orthogonale des polynômes) On définit E comme le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus 3. On munit E du produit scalaire $(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ dt$.

1. Montrer que si $F = \text{Vect}(1, X^2)$ alors $F^\perp = \text{Vect}(X, X^3)$.
2. On définit l'endomorphisme

$$\begin{array}{rccl} \phi & : & E & \longrightarrow & E \\ & & P & \longmapsto & \phi(P)(X) = P(-X) \end{array} .$$

Montrer que ϕ est une symétrie orthogonale par rapport à F.

Exercice 2 (Réflexions) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Pour quels $a, b \in \mathbb{R}$ a-t-on A orthogonale ?
2. Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les espaces propres correspondants.
3. Déduire du point précédent la nature de l'endomorphisme $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

Exercice 3 (Rotations) On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à une base orthonormée fixée (par exemple la base canonique) est

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que l'endomorphisme f est orthogonal et que sa matrice est de déterminant 1.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de A. En déduire que 1 est une valeur propre de multiplicité 1 et que la matrice n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
3. Trouver une base orthonormée pour $\ker(A - I)$ et une pour $\ker(A - I)^\perp$. Déterminer la matrice de A dans cette base.
4. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ en calculant ses valeurs propres complexes. Quels sont leurs modules et angles ?

Exercice 4 (Réflexions) On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à une base orthonormée fixée (par exemple la base canonique) est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que l'endomorphisme g est orthogonal et que sa matrice est de déterminant -1.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de B. Déterminer les valeurs propres de B ainsi que leurs multiplicités.
3. Trouver une base orthonormée dans laquelle B se diagonalise. Déterminer la matrice (orthogonale) de passage.

Exercice 5 (Plusieurs réflexions) On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard. Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à une base orthonormée fixée (par exemple la base canonique) est

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que l'endomorphisme f est orthogonal et que sa matrice est de déterminant -1.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de C. En déduire que -1 est une valeur propre de multiplicité 1 et que la matrice n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
3. Trouver une base orthonormée pour $\ker(C + I)$ et une pour $\ker(C + I)^{\perp}$. Déterminer la matrice de A dans cette base.
4. Montrer que C est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ en calculant ses valeurs propres complexes. Quels sont leurs modules et angles ?