Fiche 7

Exercice 1 (Rappels sur l'orientation)

1. Soient E un espace vectoriel de dimension n, f un endomorphisme de E, $\{u_1, \dots, u_n\} \subset E$. On fixe une base $\mathcal{B}$ de E. On notera $(u_1, \dots, u_n)_{\mathcal{B}}$ la matrice dont les colonnes sont formées des représentations de $u_1, \dots, u_n$ dans la base $\mathcal{B}$, et pareil pour $(f(u_1, \dots, f(u_n))_{\mathcal{B}}$. Montrer que $\det((f(u_1), \dots, f(u_n))_{\mathcal{B}}) = \det(f)\det((u_1, \dots, u_n)_{\mathcal{B}})$.
2. Déduire du premier point que la relation d'être de même orientation est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases orthonormées, si E est un espace euclidien.

Exercice 2 (Symétries et rotations en dimension 2**)** . Soient E un espace euclidien de dimension 2, orienté par une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, et a, b deux nombres réels. On considère les droites $L_1 = \{(x, y) \in E^2 \mid y = ax\}$ et $L_2 = \{(x, y) \in E^2 \mid y = bx\}$ dont les angles orientés avec $\mathbb{R}e_1$ sont α et β, respectivement. Déterminer l'angle de la rotation qui est la composition de la symétrie orthogonale d'abord par rapport à L_1 et ensuite de celle par rapport à L_2.

Exercice 3 (Le produit vectoriel comme on le connaît) Soit E un espace euclidien de dimension 3. On fixe une base orthonormée directe $\mathcal{B}$. Soient u et v deux éléments arbitraires de E. Déterminer les coordonnées de $u \wedge v$ dans $\mathcal{B}$ en fonction de celles de u et de v dans $\mathcal{B}$.

Exercice 4 (L'orientation et le produit vectoriel) Soit E un espace euclidien de dimension 3 orienté par une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

1. Soient u et v deux vecteurs orthogonaux de norme 1 de E et $w \in E$. Montrer que la famille (u, v, w) est une base orthonormée de E si et seulement si $w = \pm u \wedge v$. A quelle condition est-elle directe ?
2. Déterminer toutes les matrices orthogonales dont la première ligne est $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 (Le produit vectoriel : propriété algébriques) Soit E un espace euclidien de dimension 3 orienté par une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Montrer les propriétés suivantes :

1. Pour tous vecteurs u, v et w de E, $u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w$.
2. Pour tous vecteurs u, v de E et $r \in \mathbb{R}$, $r(u \wedge v) = (ru) \wedge v = u \wedge (rv)$.
3. Pour tous vecteurs u et v deux E, $u \wedge v = -v \wedge u$.
4. Pour tous vecteurs u, v et w de E,
$$u \wedge (v \wedge w) \;=\; \langle u, w\rangle v - \langle u, v\rangle w \quad \text{et} \quad (u \wedge v) \wedge w \;=\; \langle u, w\rangle v - \langle v, w\rangle u\ .$$
5. Pour tous vecteurs u, v et w de E, $u \wedge (v \wedge w) + w \wedge (u \wedge v) + v \wedge (w \wedge u) = 0$. Montrer que cette identité est équivalente à la “dérivation” suivante : $u \wedge (v \wedge w) = (u \wedge v) \wedge w + v \wedge (u \wedge w)$.

Exercice 6 (Le produit vectoriel et les endomorphismes) Soient E un espace vectoriel orienté de dimension 3 et f un endomorphisme non nul de E. On montrera que

$$\text{pour tous } u, v \in E,\ f(u \wedge v) \ = \ f(u) \wedge f(v), \text{ si et seulement si, } f \text{ est une rotation.}$$

I. On suppose que f soit une rotation.

1. Montrer que pour tous $u, v, w \in E$, $\det(f(u), f(v), f(w)) = \det(u, v, w)$.
2. Pour tous $u, v, w \in E$, montrer que $\langle f(u \wedge v), w\rangle = \langle f(u) \wedge f(v), w\rangle$.
3. Conclure.

II. On admet maintenant que pour tous $u, v \in E$, $f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$.

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que pour tous $u, v \in E$, $\det(f)(u \wedge v) = f^*(f(u) \wedge f(v))$. En déduire que $f^* \circ f = \det(f)I$. (I est la matrice identité et f^* est l'application adjointe de f.)
3. Montrer que si (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée directe de E, alors $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ en est une aussi.
4. Conclure.

Exercice 7 (Un peu d'entraînement orthogonal) Voici une superbe matrice orthogonale :

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Comment ?... Vous n'êtes pas convaincus qu'elle est orthogonale ? ! ? ! Alors, vérifiez-le.

Ensuite, vous savez bien comment on étudie sa nature géométrique, n'est-ce pas ? Si c'est une rotation, combien de réflexions il faut composer pour l'obtenir, les valeurs propres et leurs espaces, une base orthonormée dans laquelle la matrice est diagonale, une matrice orthogonale de passage à cette base... Au travail !