Contrôle terminal - Jeudi 13 juin 2012

durée : 2h

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.

Exercice 1. Soit $\mathbb{R}[x]$ l'espace des polynômes à coefficients réels. Pour $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ on définit la forme bilinéaire

$$(P, Q) = \int_0^\infty P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

1. Justifier le fait qu'il s'agit d'un produit scalaire dans $\mathbb{R}[x]$.
2. Soit $\mathbb{R}_n[x]$ le sous-espace des polynômes de degré $\leq n$. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[x]$ par la procédure de Gram-Schmidt à partir de la base canonique $(1, x, x^2)$.
3. Soit $P = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$. Calculer l'image de P par la projection orthogonale de $\mathbb{R}_n[x]$ sur $\mathbb{R}_1[x]$.

Exercice 2. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est un automorphisme orthogonal.
2. Calculer la dimension de l'espace des invariants de $\mathbb{R}^3$ par f : $\{v \in \mathbb{R}^3,\ f(v) = v\}$ et en déduire la nature de f.
3. Écrire f comme produit de réflexions.

Exercice 3. Soit E un espace euclidien dont on notera $(\ ,\ )$ le produit scalaire, $a \in E$ et u l'endomorphisme de E définit par

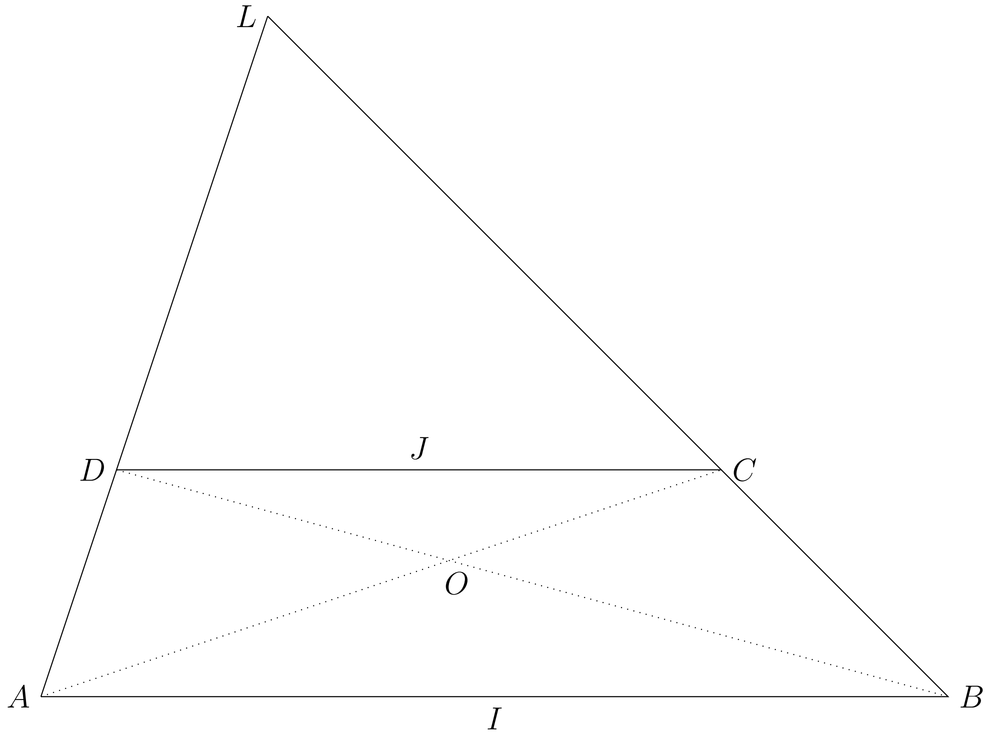
$$u(x) = (a, x)a.$$

1. Montrer que u est symétrique.
2. Déterminer les valeurs propres de u.
3. Pour quel a, l'endomorphisme u est une projection ? (indication : u est une projection si $u^2 = u$)
4. Plus généralement, soient $a_1, \ldots, a_k \in E$ tels que $(a_i, a_j) = 0$ si $i \neq j$. On définit

   $$v(x) = \sum_{i=1}^{k}(a_i, x)a_i.$$

   Montrer que v est symétrique.
5. Calculer les valeurs propres de v.
6. Diagonaliser v.

Exercice 4. Soit $ABCD$ un trapèze non plat. On note O l'intersection des diagonales (AC) et (BD), I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[DC]$ et L l'intersection des côtés (AD) et (BC). Le but de cet exercice est de montrer que I, J, L et O sont alignés.



1. On considère l'homothétie h_L de centre L telle que $h_L(D) = A$. Montrer que $h_L(C) = B$.
2. En utilisant les propriétés de conservation des barycentres, montrer que les points I, J et L sont alignés.
3. En utilisant l'homothétie h_O de centre O telle que $h_O(D) = B$ et suivant un raisonnement similaire, montrer que I, J et O sont alignés. Conclure.