Table des matières

Résumé du programme

Topologie

— Définition d'un espace topologique. On se concentrera dans ce cours sur les espaces métriques ;
— Espaces métriques (ouvert, fermé, adhérence etc.) ;
— Espaces normés ;
— Topologies induites ;
— Continuité, continuité uniforme pour des applications entre espaces vectoriels normés, exemple des applications linéaires, norme subordonnée ;
— Espaces complets ;
— Théorème du point fixe de Banach ;
— Compacité, théorème de Bolzano-Weierstrass ;
— Séries convergentes, convergence absolue ;
— Topologie du produit ;
— Connexité.

Équations différentielles dans $\mathbf{R}^n$

— Rappels : résolution explicite pour le premier et le second ordre ;
— Lemme de Gronwall ;
— Théorème de Cauchy-Lipschitz ;
— Solutions maximales, globales ;
— Étude des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants ;
— Étude qualitative (équilibre, stabilité. . .).

Première partie

Topologie

Chapitre 1

Premières définitions

1.1 Motivation

> **Topologie :** l'étude de : continuité (d'applications), convergence (de suites, fonctions), connexité, compacité (à voir…).

Que faut-il connaître pour définir la convergence d'une suite ?

> Dans $\mathbf{R}$: $x_n \to y$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que $n \geq N$ implique $|x_n - y| < \varepsilon$.

Rappel 1.1. Soit E un $\mathbf{K}$-e.v. où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ Une **norme** sur un $\mathbf{K}$-e.v. E est une application $\|\cdot\| \colon E \to \mathbf{R}^{\geq 0}$ t.q.

(i) $\|x\| = 0$ ssi $x = 0$.

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ pour tout $\alpha \in \mathbf{K}$.

(iii) Inégalité triangulaire : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Un **espace vectoriel normé** est un $\mathbf{K}$-e.v. muni d'une norme, noté $\big(E, \|\cdot\|\big)$.

> Dans un espace vectoriel normé $\big(E, \|\cdot\|\big)$: $x_n \to y$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que $n \geq N$ implique $\|x_n - y\| < \varepsilon$.

Dans le premier cas il suffit de connaître la fonction $d(x, y) = |x - y|$, dans le deuxième il suffit de connaître $d(x, y) = \|x - y\|$. Ce sont des distances.

Rappel 1.2. Soit X un ensemble. Une **distance** sur X est une fonction $d \colon X^2 \to \mathbf{R}^{\geq 0}$ vérifiant :

(i) $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$.

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$.

(iii) Inégalité triangulaire : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Un **espace métrique** est un ensemble (= "espace") muni d'une distance, noté (X, d).

Si on connaît la distance, cela suffit pour définir si $x_n \to y$:

> Dans espace métrique (X, d) : $x_n \to y$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que $n \geq N$ implique $d(x_n, y) < \varepsilon$.

Autrement dit, étant donné un e.v.n. $\big(E, \|\cdot\|\big)$, on peut "oublier" que c'est un e.v.n., retenant seulement la distance, et on peut toujours définir quand $x_n \to y$ dans E. Maintenant, on va aller encore plus loin et oublier même la distance…

Définition 1.3. Soit (E, d) un espace métrique, $x \in X$ et $r \in \mathbf{R}^{>0}$.

On définit la **boule ouverte** de centre x et rayon r :

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

On définit la **boule fermée** de centre x et rayon r :

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}.$$

Définition 1.4. Soit (X, d) un espace métrique.

Une partie $U \subseteq X$ est dite **ouverte** si pour tout $x \in U$ il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq U$.

Une partie $F \subseteq X$ est dite **fermée** si son complémentaire $X \setminus F$ est une partie ouverte.

Lemme 1.5. *Dans un espace métrique, toute boule ouverte est une partie ouverte, et toute boule fermée est une partie fermée.*

Proposition 1.6. *Dans un espace métrique (X, d), sont équivalents pour une suite $(x_n) \subseteq X$ et un point $y \in X$:*

(i) $x_n \to y$

(ii) *Pour tout ouvert $U \subseteq X$ tel que $y \in U$ il existe N tel que $n \geq N$ implique $x_n \in U$.*

Démonstration. Supposons que $x_n \to y$. Soit U ouvert tel que $y \in U$. Par définition d'un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(y, r) \subseteq U$. Par définition de $x_n \to y$, il existe N tel que $n \geq N$ implique $d(x_n, y) < r$, donc $x_n \in B(y, r)$, donc $x_n \in U$.

Pour la réciproque, supposons que la 2e condition est vraie et montrons que $x_n \to y$. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Alors on a $y \in B(y, \varepsilon)$, et $U = B(y, \varepsilon)$ est un ouvert. Il existe donc N tel que si $n \geq N$ alors $x_n \in B(y, \varepsilon)$, donc $d(y, x_n) < \varepsilon$. Ainsi $x_n \to y$. □

Autrement dit : pour savoir si $x_n \to y$, nous pouvons oublier même la distance, il suffit de retenir la famille des parties ouvertes. Cette famille s'appelle une la **topologie** de X.

Nous verrons plus tard qu'en connaissant que la topologie d'un espace, on peu définir la continuité des applications, et plusieurs autre notions utiles.

1.2 Espaces topologiques

Définition 1.7. Soit X un ensemble. Une **topologie** sur X est une famille τ de parties de X vérifiant :

(i) $\emptyset, X \in \tau$.

(ii) Si $U, V \in \tau$ alors $U \cap V \in \tau$.

(iii) Si I est un ensemble quelconque et $U_i \in \tau$ pour chaque $i \in I$ alors $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

La paire (X, τ) (ou X tout court, si τ est connu) s'appelle un **espace topologique**. Let membres de τ sont appelés des **parties ouvertes** ou juste des **ouverts** de l'espace topologique (X, τ).

Proposition 1.8. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors la famille des ouverts de X forme une topologie.*

Démonstration. ... □

Example (d'espaces topologiques). (i) Tout espace métrique est donc aussi un espace topologique, muni de la **topologie métrique**.

(ii) C'est en particulier le cas pour un e.v.n. $\left(E, \|\cdot\|\right)$: la topologie est définie par la distance qui est définie par la norme.

(iii) Pour $\mathbf{R}$ muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$, ou $\mathbf{R}^n$ muni de la distance $d(x, y) = \|x - y\|_2$, on appelle la topologie associée la **topologie euclidienne** (car cette distance est la **distance euclidienne**).

(iv) Topologie discrète sur X : toutes les parties de X sont ouvertes.

(v) Topologie grossière sur X : les seules parties ouvertes sont $\emptyset$ et X.

Exercice 1.9. Vérifier que la topologie grossière et la topologie discrète sont des topologies.

Exercice 1.10. Munissons un ensemble quelconque X par la distance :

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y. \end{cases}$$

(i) Vérifier que c'est bien une distance. On l'appelle la **distance discrète** sur X.

(ii) Vérifier que la topologie associée est la topologie discrète.

Définition 1.11. Fermés = complémentaires des ouverts.

Les fermés et leurs propriétés.

Attention. Une partie de X peut être : ouverte, fermée, aucun des deux ou les deux à la fois.

Définition 1.12. Adhérence, intérieur.

Propriétés :
- $X \setminus \mathring{A} = \overline{X \setminus A}$.
- $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$
- A est ouvert ssi $A = \mathring{A}$. En particulier $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$. Analogue pour fermé/adhérence.
- Si A est ouvert et $A \subseteq B$ alors $A \subseteq \mathring{B}$
- Si B est fermé et $A \subseteq B$ alors $\overline{A} \subseteq B$

Conséquences :
- Si $A \subseteq B$ alors $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ et $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$.
- $\overline{\mathring{A}} \subseteq \overline{A}$ et $\mathring{A} \subseteq \mathring{\overline{A}}$
- $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} = \overline{\mathring{A}}$ et $\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} = \mathring{\overline{A}}$

Définition 1.13. Partie dense.

Définition 1.14. Voisinage de x = ensemble qui A qui contient un ouvert qui contient x = $x \in \mathring{A}$. La famille des voisinages : $\mathcal{V}(x)$.

Caractérisation des points adhérents par les voisinages. Point isolé vs. point d'accumulation.

Lemme 1.15. *Soit X un espace topologique et $U \subseteq X$ une partie. Sont équivalents :*

(i) *U est ouvert.*

(ii) *Pour chaque $x \in U$: U est un voisinage de X.*

(iii) *Pour chaque $x \in U$: U contient un voisinage de x.*

Définition 1.16. Base de voisinages.

Exercice 1.17. Les ouverts contenant x forment une base de voisinages pour x.

Dans un espace métrique, les boules ouvertes (ou les boules fermées de rayon strictement positif) de centre x forment une base de voisinages.

Caractérisation des points adhérents par une base des voisinages.
Pareil par la caractérisation des ouverts.

Définition 1.18. Topologie induite. Ouverts et fermés relatifs.

Example. Soit $X = \mathbf{R}$ et $Y = [0,1] \cup [2,4] \subseteq X$. L'intervalle $[0,1]$ est ouvert dans Y mais non dans X.

Exercice 1.19. Soit X un espace topologique et $Y \subseteq X$ muni de la topologie induite.

Si Y est un ouvert de X, alors les ouverts relatifs de Y sont aussi des ouverts de X. (Et si Y n'est pas ouvert ?)

Pareil pour « fermé » au lieu d'« ouvert ».

1.3 Espaces métriques

Nous avons déjà défini les espaces métriques et leur topologie plus haut. Nous avons également montré que les boules ouvertes sont des ouvertes et que les boules fermées sont des fermés.

Exercice 1.20. Montrer que dans un espace métrique on a toujours

$$\overline{B(x,r)} \subseteq \overline{B}(x,r),$$
$$\overline{B}(x,r)^\circ \supseteq B(x,r).$$

Montrer, en donnant un exemple, que les inclusions peuvent être strictes.

Définition 1.21. Distance induite.

La distance induite est compatible avec la topologie induite.

Example. $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, espaces normés. Leurs parties (qui ne sont pas forcément des espaces vectoriels), par exemple $[0,1] \cup \{9i\} \subseteq \mathbf{C}$.

Remarque 1.22. Propriétés topologiques d'un espace métrique (X,d) :

(i) Il est **séparé** : pour tout $x, y \in X$, si $x \neq y$ alors il existe des ouverts disjoint $U, V \subseteq X$ tels que $x \in U$ et $y \in V$ [dessin]. Autrement dit, « les points de X sont séparés par des ouverts. » (Dans la littérature cette propriété s'appelle également « Hausdorff » ou T_2).

(ii) Tous les singletons $\{x\}$ sont des fermés (conséquence du précédent, s'appelle aussi T_1).

(iii) Tout point $x \in X$ admet une base **dénombrable** de voisinages $\mathscr{B}_x$ (c.à.d., que l'on peut énumérer comme $\mathscr{B}_x = \{A_n : n \in \mathbf{N}\}$).

Pour certains résultats ces deux propriétés sont tout ce qu'il nous faudra.

Exercice 1.23. T_2 implique T_1.

Exercice 1.24. Une topologie métrique peut-elle coïncider avec la topologie grossière ?

Dans un espace métrique, x est un point d'accumulation de A ssi tout voisinage de x contient une infinité de points de A.

Exercice 1.25. Dans un espace topologique T_1 (pas forcément métrique) on a la même caractérisation des points d'accumulation.

Définition 1.26. — Distances équivalentes (ou Lipschitz-équivalentes)

— Distances topologiquement équivalentes.

Lemme 1.27. *Soit X un ensemble, d_1 et d_2 deux distances sur X. Sont équivalents :*

(i) *d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes.*

(ii) *Pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que*

$$B_{d_1}(x,\delta) \subseteq B_{d_2}(x,\varepsilon), \qquad B_{d_2}(x,\delta) \subseteq B_{d_1}(x,\varepsilon).$$

Exercice 1.28. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Nous munissons $X \times Y$ de deux distances :

$$d_1\big((x,y),(x',y')\big) = d_X(x,x') + d_Y(y,y'),$$
$$d_\infty\big((x,y),(x',y')\big) = \max d_X(x,x'), d_Y(y,y').$$

Montrer que ces deux distances sont équivalentes.

1.4 Espaces normés

Rappels : norme et distance associée. Exemples : les normes p sur $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$. Espaces ℓ^p [sans preuve]. Plusieurs normes sur l'espace $C\big([0,1],\mathbf{R}\big)$.

Lemme 1.29 (Équivalence de normes)**.** *Soit $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes sur un e.v. E. Sont équivalents :*

(i) *Il existe $C>0$ tel que pour tout $x \in E$:*

$$\frac{1}{C}\|x\| \leq \|x\|' \leq C\|x\|.$$

(Autrement dit, les distances associés sont équivalentes.)

(ii) *Les deux normes définissent la même topologie. (Autrement dit, les distances associés sont topologiquement équivalentes.)*

(iii) *Il existe $c>0$ tel que*

$$B_{\|\cdot\|}(0,c) \subseteq B_{\|\cdot\|'}(0,1) \quad \textit{et} \quad B_{\|\cdot\|'}(0,c) \subseteq B_{\|\cdot\|}(0,1)$$

Si ces conditions équivalentes sont vérifiées, on dit que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes.

Théorème 1.30. *Toutes les normes sur $\mathbf{R}^n$ sont équivalentes.*

Démonstration. Plus tard : au chapitre sur la compacité. □

Chapitre 2

Convergence et continuité

2.1 Convergence

Soit X un espace topologique. Parfois on ajoutera l'hypothèse que X est, de surcroît, un espace métrique.

Définition 2.1. Convergence d'une suite dans un espace topologique et dans un espace métrique. Unicité de la limite dans un espace métrique, ou dans un espace T_2.

Lemme 2.2. *Caractérisation des ouverts dans un espace métrique par la convergence.*

Lemme 2.3. *Soit X un espace topologique et $A \subseteq X$.*

— *Si (x_n) est une suite de A et $x_n \to x$ alors $x \in \overline{A}$.*
— *Si X est un espace* **métrique** *alors la réciproque est vraie : tout $x \in \overline{A}$ est limite d'une suite de points de A :*

$$\overline{A} = \{\textit{limites de suites de points de } A\}$$

Corollaire 2.4. *Soit d_1 et d_2 deux distances sur un ensemble X. Pour qu'elles soit topologiquement équivalentes, il faut et il suffit que pour toute suite $(x_n) \subseteq X$ et tout $y \in X$ on ait*

$$x_n \to y \textit{ selon } d_1 \quad \Longleftrightarrow \quad x_n \to y \textit{ selon } d_2.$$

Définition 2.5. Valeur d'adhérence d'une suite.

Exercice 2.6. L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (x_n) est

$$\bigcap_n \overline{\{x_m : m > n\}}.$$

Définition 2.7. Suite extraite.

Toute limite d'une suite extraite de (x_n) est une valeur d'adhérence de (x_n).

Lemme 2.8. *Dans un espace métrique : les valeurs d'adhérence d'une suite sont exactement les limites des suites extraites convergentes.*

Corollaire 2.9. *Dans un espace métrique, si $x_n \to x$ alors x est l'unique valeur d'adhérence de la suite (x_n). (Réciproque fausse.)*

Exercice 2.10. Pareil dans un espace séparé.

2.2 Continuité

Rappels : Image directe et réciproque.

Définition 2.11. Application continue à un point x, au sens topologique (l'image réciproque d'un voisinage). Au sens métrique $(\varepsilon,\,\delta)$.

Lemme 2.12. *Sont équivalents :*
- *f est continue à x au sens topologique.*
- *f est continue à x au sens métrique.*
- *Pour toute suite $x_n \to x$ on a $f(x_n) \to f(x)$.*

Définition 2.13. Application continue si continue à tout point.

Définition équivalente d'une application continue au sens topologique (images réciproques d'ouverts).

Exercice 2.14. $f\colon X \to Y$ est continue ssi pour tout fermé $F \subseteq Y$, son image réciproque $f^{-1}(F)$ est fermée.

Example. Toute application constante est continue.

Composition d'applications continues.

Lemme 2.15. *On équipe $X \times Y$ de la distance*

$$d_1\big((x,y),(x',y')\big) = d_X(x,x') + d_Y(y,y').$$

Alors

(i) *L'application $\Delta\colon X \to X \times X$ définie par $\Delta(x) = (x,x)$ est continue.*

(ii) *Si $f\colon Y \to Z$ est continue alors* $\mathrm{id} \times f\colon X \times Y \to X \times Z$ *est continue.*

(iii) *Les applications $+\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ et $\cdot\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sont continues.*

Montrer que $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = xy + 5y^2$ est continue.

Définition 2.16. Application ouverte. Application fermée. Homéomorphisme.

Example. L'identité est toujours un homéomorphisme.

Example. La projection stéréographique.

Exercice 2.17. Soit X un espace topologique et $Y \subseteq X$ muni de la topologie induite.

L'application identité $Y \to X$ (l'application d'inclusion) est toujours continue.

Définition 2.18. Application **uniformément** continue entre deux espaces métriques.

Définition 2.19. Application lipschitzienne.

Théorème 2.20. *Continué d'une application linéaire entre deux espaces normés $f\colon E \to F$. Sont équivalents :*

(i) *Il existe C tel que*

$$\forall\, x \in E \quad \|f(x)\|_F \leq C\|x\|_E.$$

(Autrement dit, la restriction de f à la boule unité de E est bornée.)

(ii) *Continue à* 0

(iii) *Continue*

(iv) *Uniformément*

(v) *Lipschitzienne.*

Example. Soit $E = C\big([0,1],\mathbf{R}\big)$, et $\varphi\colon E \to \mathbf{R}$ l'intégration. Alors φ est continue.

Corollaire 2.21. *Si* $\dim E < \infty$ *: tout application linéaire* $f\colon E \to F$ *est continue.*

Définition 2.22. $L(E, F)$. La norme subordonnée.

Example. Espace dual, norme duale.

Définition 2.23. Convergence simple et uniforme de suites de fonctions.

Lemme 2.24. *Convergence dans la norme subordonnée = convergence uniforme sur la boule unité.*

Lemme 2.25. *Une limite uniforme d'une suite de fonctions continues est une fonction continue.*

Chapitre 3

Espaces métriques complets

3.1 Définitions, exemples

Ici tous les espaces sont métriques !

Définition 3.1. Suite de Cauchy dans un espace métrique.

Si (x_n) est une suite de Cauchy alors
— Elle est bornée.
— Toute suite extraite est une suite de Cauchy.

Lemme 3.2. *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Quand une suite de Cauchy converge-t-elle ?

Lemme 3.3. *Soit (x_n) une suite de Cauchy. Sont équivalents :*
— Elle converge.
— Elle admet au moins une valeur d'adhérence.
— Elle admet une suite extraite convergente.
(Dans ce cas : la limite = l'unique valeur d'adhérence = la limite de toute suite extraite)

On se rappelle que si une suite (x_n) tend vers y alors il est de même pour toute suite extraite.

Définition 3.4. Espace métrique complet.
Espace de Banach.

Lemme 3.5. *Soit X un espace métrique complet, et soit $Y \subseteq X$ muni de la métrique induite.*
Alors Y est fermé dans X ssi Y est complet.

(L'hypothèse que X est complet ne sert que pour l'implication Y fermé $\Longrightarrow Y$ complet.)

Example. Tout espace muni de la distance 0/1 (distance discrète)

Lemme 3.6 (Bolzano-Weierstrass pour $\mathbf{R}$). *Dans $\mathbf{R}$, toute suite bornée (x_n) admet une valeur d'adhérence.*
Par exemple,

$$\limsup x_n = \inf_k \sup_{n \geq k} x_n$$

est toujours une valeur d'adhérence.

Example. $\mathbf{R}$ muni de la distance usuelle est complet.

Example. $[0, 1]$ est complet, $]0, 1[$ ne l'est pas.

Example. $\mathbf{R}$ muni de $d(x,y) = |e^x - e^y|$ n'est pas complet. La complétude n'est pas un invariant topologique.

Définition 3.7. Soit X un espace topologique. On définit

$$C(X,\mathbf{R}) = \{\text{applications continues } f\colon X \to \mathbf{R}\},$$
$$C_b(X,\mathbf{R}) = \{\text{applications continues et bornées } f\colon X \to \mathbf{R}\}.$$

On munit $C_b(X,\mathbf{R})$ de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Proposition 3.8. *Comme définie, $\|\cdot\|_\infty$ est bien une norme sur $C_b(X,\mathbf{R})$. Elle est de surcroît complète, rendant $C_b(X,\mathbf{R})$ un espace de Banach.*

Example. $\mathbf{R}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est complet.

Example. $C\big([0,1]\big)$ muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{0\geq x\geq 1} f(x).$$

(Plus généralement, $C(X)$ où X est un espace compact quelconque.)

Lemme 3.9. *Si deux distances sont équivalentes, l'une est complète ssi l'autre l'est.*

Example. Toute norme sur $\mathbf{R}^n$ est complète.

Exercice 3.10. Soit (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques complets. Nous munissons $Z = X \times Y$ de deux distances :

$$d_1\big((x,y),(x',y')\big) = d_X(x,x') + d_Y(y,y'),$$
$$d_\infty\big((x,y),(x',y')\big) = \max\, d_X(x,x'), d_Y(y,y').$$

Montrer que ces deux distances sont équivalentes, et complètes.

Exercice 3.11. Pareil, avec en plus

$$d_2\big((x,y),(x',y')\big) = \big(d_X(x,x')^2 + d_Y(y,y')^2\big)^{1/2}.$$

Example. Si E est un espace normé quelconque et F un Banach alors $L(E,F)$, muni de la norme subordonnée, est un Banach.

En particulier, l'espace dual de tout espace normé.

Example. ℓ^p. $L^p(X,\mu)$.

3.2 Premières propriétés

Lemme 3.12. *Extension d'une application uniformément continue définie sur une partie dense, vers un espace complet.*

Définition 3.13. Soit X un espace métrique. Une application $f\colon X \to X$ est dite **contractante** si elle lipschitzienne de constante $0 \leq k < 1$. Autrement dit, s'il existe une constante $k < 1$ tel que $d\big(f(x), f(y)\big) \leq kd(x,y)$ pour tout x, y.

Théorème 3.14 (Théorème de point fixe de Banach)**.** *Soit X un espace métrique complet et $f\colon X \to X$ une application contractante. Alors f admet un unique point fixe dans X.*

Théorème 3.15 (Théorème de Baire)**.** *Dans un espace métrique complet, toute intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses est dense.*

Corollaire 3.16. *Aucune distance complète n'induit la distance usuelle sur $\mathbf{Q}$.*

3.3 Espaces de Hilbert

Définition 3.17. Espace de Hilbert.

Théorème 3.18. *Soit H un espace de Hilbert $C \subseteq H$ convexe, fermé et $x \in H$. Alors il existe un unique $y \in C$ tel que $d(x, C) = d(x, y)$.*

Démonstration. Posons $D = d(x, C) = \inf_{y \in C} \|x - y\|$, de sorte que $D^2 = \inf_{y \in C} \|x - y\|^2$. Montrons que si $y, z \in C$ sont tels que $\|x - y\|^2 < D^2 + \varepsilon$ et $\|x - z\|^2 < D + \varepsilon^2$ alors $\|y - z\| \leq 2\sqrt{\varepsilon}$.

En effet nous posons $u = \frac{y+z}{2}$ et $v = \frac{y-z}{2}$, de sorte que $u + v = y$ et $u - v = z$. Puisque C est convexe, $u \in C$, de sorte que $\|x - u\|^2 \geq D^2$. Ainsi

$$\begin{aligned} 2D^2 + 2\varepsilon &> \|x - y\|^2 + \|x - z\|^2 \\ &= \|x - u - v\|^2 + \|x - u + v\|^2 \\ &= 2\|x - u\|^2 + 2\|v\|^2 \\ &\geq 2D^2 + 2\|v\|^2 \end{aligned}$$

Ainsi $\|v\| < \sqrt{\varepsilon}$ et $\|y - z\| < 2\sqrt{\varepsilon}$. □

Rappel : $F^\perp$.

Corollaire 3.19. *Soit E un espace de Hilbert, $F \subseteq E$ un s.e.v. fermé. Alors $E = F \oplus F^\perp$. Autrement dit, pour tout $x \in E$ il existe un unique $x' \in F$ tel que $x - y' \perp F$. Ce x' est le* **projeté orthogonal** *de x sur F, noté $x' = P_F(x)$, et x'' est le projeté orthogonal de x sur $F^\perp$.*

Démonstration. Si $x \in F \cap F^\perp$ alors $x \perp x$ d'où $x = 0$. Il reste à montrer que l'on peut exprimer tout $x \in E$ comme $x' + x''$ où $x' \in F$ et $x'' \in F^\perp$.

F est convexe, car un s.e.v., et fermé par hypothèse. Il existe donc $x' \in F$ tel que $d(x, F) = d(x, x')$. Posons $x'' = x - x'$ et montrons que $x'' \perp F$.

Soit $z \in F \setminus \{0\}$, et posons

$$w = \frac{\langle z, x'' \rangle}{\|z\|^2} z.$$

D'un côté on a $\|x'' - w\| = \|x - (x' + w)\| \geq d(x, F) = \|x''\|$. D'un autre côté : $\langle z, w \rangle = \langle z, x'' \rangle$, d'où $z \perp x'' - w$ et $w \perp x'' - w$. Ainsi, par Pythagore :

$$\|x''\|^2 = \|x'' - w\|^2 + \|w\|^2 \geq \|x''\|^2 + \frac{|\langle x'', z \rangle|^2}{\|z\|^2}$$

Ceci n'est possible que si et $\langle x'', z \rangle = 0$. Comme $z \in F \setminus \{0\}$ était arbitraire et $x'' \perp 0$ toujours, on a bien $x'' \perp F$. □

Corollaire 3.20 (Théorème de représentation de Riesz)**.** *Soit H un espace de Hilbert et $\varphi \colon H \to \mathbf{R}$ une forme linéaire continue (i.e., $\varphi \in L(H, \mathbf{R})$). Alors il existe un unique $y \in H$ tel que pour tout $x \in H$:*

$$\varphi(x) = \langle y, x \rangle$$

De surcroît, $\|\varphi\| = \|y\|$ (la norme subordonnée).

Démonstration. Si $\varphi = 0$: OK. Sinon : soit $F = \ker \varphi$, un sous-espace fermé. Soit u tel que $\varphi(u) \neq 0$ et $u_1 = P_F(u)$. Soit $z = u - u_1$: $\varphi(z) \neq 0$ et $z \perp \ker \varphi$.

Finalement :

$$y = \frac{\varphi(z)}{\|z\|^2} z$$

□

(La réciproque est facile.)

Exercice 3.21. Soit E un Hilbert de dimension infinie. Supposons en outre de E soit séparable : il existe une partie $E_0 \subseteq E$ qui est dense ($\overline{E_0} = E$) et dénombrable (on peut l'énumérer $E_0 = \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$).

(i) Montrer qu'il existe une famille orthonormée $(e_n : n \in \mathbf{N})$ telle que $\mathrm{Vect}(e_n : n \in \mathbf{N})$ est dense.
Par exemple, on pourrait essayer de le construire à partir de E_0, de sorte que $\mathrm{Vect}(e_n : n \in \mathbf{N}) \supseteq E_0$, et même tel que $\mathrm{Vect}(e_n : n < N) \supseteq \{x_n : n < N\}$.

(ii) Identité de Parseval : Soit maintenant $x \in E$, et posons $x_n = \langle e_n, x\rangle$. Montrer que

(a) $\|x\|^2 = \sum |x_n|^2$.

(b) $\left\|x - \sum_{k<n} x_k e_k\right\|^2 = \sum_{k \geq n} |x_k|^2$

(c) En déduire que $\sum_{k<n} x_n e_n \to x$ lorsque $n \to \infty$ (on écrira donc $\sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n = x$).

Chapitre 4

Espaces compacts

4.1 Généralités

Définition 4.1. Recouvrement par des ouverts.

Un espace topologique X est **compact** si

(i) Il est séparé

(ii) Il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue : tout recouvrement par des ouverts admet un sous-recouvrement fini.

[Caveat : dans la littérature anglophone, « compact » signifie seulement la 2e propriété. Donc « compact français » = « compact anglais et séparé ».]

Proposition 4.2. *La propriété de Borel-Lebesgue est équivalente à : si $\{F_i\}_{i\in I}$ st une famille de fermés, et pour tout $I_0 \subseteq I$ fini on a $\bigcap_{i\in I_0} F_i \neq \emptyset$, alors $\bigcap_i F_i \neq \emptyset$.*

Corollaire 4.3. *Dans un espace compact, si $\{F_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ est une famille décroissante de fermés non vides alors $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$.*

Corollaire 4.4. *Soit X un espace compact.*

(i) *X a la propriété de Bolzano-Weierstrass : toute suite (x_n) admet une valeur d'adhérence.*

(ii) *La suite converge ssi cette valeur d'adhérence est unique.*

Démonstration. Existence : nous avons vu que l'ensemble des valeurs d'adhérence est

$$\bigcap_k \overline{\{x_n : n > k\}}.$$

Si une suite converge, sa limite est son unique valeur d'adhérence. Réciproquement, soit y une valeur d'adhérence. Si $x_n \not\to y$ on peut extraire une sous-suite qui évite un voisinage de y, d'où une deuxième valeur d'adhérence. □

Définition 4.5. Une partie d'un espace topologique est dite **compacte** si elle est compact dans la topologie induite.

Lemme 4.6. *Une partie K d'un espace séparé X est compacte ssi tout recouvrement de K par des ouverts de X admet un sous-recouvrement fini.*

Proposition 4.7. *Soit X un espace topologique et $F \subseteq X$.*

(i) *Si X est séparé alors : F compact $\Longrightarrow$ F férmé.*

(ii) *Si X est compact alors : F compact $\Longleftrightarrow$ F férmé.*

Proposition 4.8. *Soit X compact, Y séparé, et $f\colon X \to Y$ continue. Alors $f(X) \subseteq Y$ est compact.*

Proposition 4.9. *Une réunion finie de compacts est un compact. Une intersection quelconques de compacts est un compact.*

4.2 Espace métriques compacts

Lemme 4.10. *Soit X un espace métrique. Toute partie compacte de X est fermée et bornée.*

Lemme 4.11. *Si $A \subseteq \mathbf{R}$ est non vide et majoré (minoré) alors $\sup A \in \overline{A}$ ($\inf A \in \overline{A}$). Donc, si A est fermé et borné alors $\sup A = \max A \in A$ et $\inf A = \min A \in A$.*

Ceci est vrai en particulier si A est compact.

Théorème 4.12. *Soit X un espace topologique compact, $f \colon X \to \mathbf{R}$ continue. Alors f est bornée, et elle atteint son maximum et son minimum sur X.*

On rappelle que dans un espace métrique, une valeur d'adhérence d'une suite est la limite d'une sous-suite. Ainsi, un espace métrique X a la propriété de B-W ssi toute suite admet une sous-suite convergente.

Lemme 4.13. *Soit X un espace métrique ayant la propriété de Bolzano-Weierstrass. Soit $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert. Alors il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$ il existe $i \in I$ tel que $B(x, r) \subseteq U_i$.*

Démonstration. Sinon, soit (x_n) une suite de contre-exemples pour $r = 2^{-n}$. Elle admet une valeur d'adhérence y. Dont il existe n et i tels que $B(y, 2^{-n}) \subseteq U_i$, et il existe $m > n$ tel que $d(x_m, y) < 2^{-n-1}$, contradiction. □

Théorème 4.14. *Soit X un espace métrique. Alors sont équivalents :*

(i) *X est compact.*

(ii) *X a la propriété de B-W.*

(iii) *Toute suite dans X admet une suite extraite convergente.*

Démonstration. L'équivalence (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) est facile. On a déjà vu que (i) $\Longrightarrow$ (ii)

Pour l'autre, supposons que X n'est pas compact. Il existe donc un recouvrement ouvert $\mathscr{C} = \{U_i\}$ n'ayant pas de sous-recouvrement fini. Soit $r > 0$ donné par le Lemme. Pour chaque n nous allons choisir $x_n \in X$ et $V_n \in \mathscr{C}$ tels que :

— $x_n \notin V_0 \cup \ldots \cup V_{n-1}$

— $B(x_n, r) \subseteq V_n$.

En particulier, $d(x_n, x_m) \geq r$, cette suite n'admet pas de valeur d'adhérence. □

Exercice 4.15. Un espace métrique compact est toujours complet.

Rappel : Théorème de Bolzano-Weierstrass : dans $\mathbf{R}$, toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

Corollaire 4.16. *$[a, b] \subseteq \mathbf{R}$ est compact.*

Corollaire 4.17 (Théorème de Tychonoff pour le espaces métriques)**.** *Soit $X_1, \ldots, X_n$ des espaces métriques compacts. Alors $X_1 \times \cdots \times X_n$ (que l'on munit, par exemple, de la distance $d(x, y) = \max_{i=1}^n d(x_i, y_i)$) est compact*

Démonstration. Par extraction diagonale. □

Corollaire 4.18. *On se rappelle que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ dont équivalentes sur $\mathbf{R}^n$, définissant la même* **topologie euclidienne***. Dans cette topologie, $K \subseteq \mathbf{R}^n$ est compact ssi c'est un fermé borné.*

Théorème 4.19. *Sur $\mathbf{R}^n$ toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. Soit $\|\cdot\|$ une norme. Posant $M = \sum_i \|e_i\|$ on a $\|x\| \leq M\|x\|_\infty$. Il en découle que $\|\cdot\|$ est continue dans la topologie euclidienne. D'ailleurs, $S = \{x : \|x\|_\infty = 1\}$ est compact car borné et fermé. Ainsi, $\inf_{x\in S} \|x\|$ est atteint : il existe $x_0 \in S$ tel que $\inf_{x\in S} \|x\| = \|x_0\|$. Comme $\|x_0\| > 0$ on pose $C = \|x_0\|^{-1}$.

Maintenant : si $\|x\|_\infty = 1$ alors $C\|x\| \geq C\|x_0\| = 1$. Ainsi $C\|x\| \geq \|x\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$. □

Théorème 4.20 (Théorème de Heine)**.** *Soit X et Y des espaces métriques, avec X compact. Alors tout application continue $f \colon X \to Y$ est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $f\colon X \to Y$ continue et fixons $\varepsilon > 0$. Nous savons que pour tout x il existe $\delta(x)$ tel que si $d(x, x') < \delta(x)$ alors $d(fx, fx') < \varepsilon$. On prend une famille finie $x_1, \dots, x_n$ telle que $X = \bigcup_i B\bigl(x_i, \delta(x_i)/2\bigr)$. On montre que $\Delta = \min_i \delta(x_i)/2$ marche. □

Lemme 4.21. *Pour qu'un espace métrique X soit compact il faut et il suffit que :*

(i) *X soit complet.*

(ii) *Pour tout $r > 0$ il existe une famille finie $x_1, \dots, x_n \in X$ telle que $X = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r)$.*

Théorème 4.22 (Théorème d'Arzelà-Ascoli)**.** *Soit K un espace compact, et $A \subseteq C(K)$ fermé et bornée. Supposons également que A est équi-continu : pour tout $\varepsilon > 0$ et $x \in K$, il existe un voisinage $V \ni x$ tel que pour tout $y \in V$ et tout $f \in A$, $d\bigl(f(x), f(y)\bigr) < \varepsilon$. Alors A est compact.*

4.3 Le vrai théorème de Tychonoff

Définition 4.23. La topologie produit sur $X \times Y$. Sur $X_1 \times \cdots \times X_n$.

Lemme 4.24. *Si $X_1, \dots, X_n$ sont métriques, la topologie produit est celle induite par $d_\infty(x, x') = \max_{i=1}^n d(x_i, x_i')$.*

Théorème 4.25 (Tychonoff)**.** *Si $X_1, \dots, X_n$ sont compacts, $X_1 \times \cdots \times X_n$ l'est aussi.*

Démonstration. Pour $n = 2$.

Soit $\{O_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de $X \times Y$ par des ouverts.

Étape I : pour chaque paire $(x, y) \in X \times Y$ il existe $O_{x,y} \in \{O_i\}_{i \in I}$ tq $(x, y) \in O_{x,y}$. Par définition de la topologie, il existe des ouverts $U_{x,y} \subseteq X$ et $V_{x,y} \subseteq Y$ tels que $(x, y) \in U_{x,y} \times V_{x,y} \subseteq O_{x,y}$.

Étape II : fixons $x \in X$. Alors $\bigcup_{y \in Y} V_{x,y} = Y$. Par compacité de Y il existe $Y_x \subseteq Y$ fini tq $\bigcup_{y \in Y_x} V_{x,y} = Y$. On pose $W_x = \bigcap_{y \in Y_x} U_{x,y}$. On observe que

— W_x est ouvert

— $x \in W_x$

— $\bigcup_{y \in Y_x} O_{x,y} \supseteq W_x \times Y$.

Il existe $X_0 \subseteq X$ fini tq $\bigcup_{x \in X_0} W_x = X$.

La famille $\{O_{x,y}\}_{x \in X_0, y \in Y_x}$ est un sous-recouvrement fini. □

Cas d'un produit infini.

Chapitre 5

Espaces connexes

5.1 Connexité

définitions [partition en deux ouverts ; deux fermés ; ouvert-fermé non trivial]

équivalence avec le fait que toute application continue sur l'espace et à valeurs dans $\mathbf{Z}$ est constante (et plus généralement toute application continue à valeurs dans un espace discret de cardinal au moins 2).

Théorème 5.1. $[0, 1]$ *est connexe.*

Rappel : la **frontière** de $B \subseteq X$ est $\partial B = \overline{B} \setminus B^\circ$.

Lemme 5.2. *Soit X un espace topologique, $B \subseteq X$. Alors $B^\circ = B \setminus \partial B = \overline{B} \setminus \partial B$ est un ouvert-fermé de $X \setminus \partial B$.*

Proposition 5.3 (Lemme du passage des douanes)**.** *Soit $A \subseteq X$ connexe et $B \subseteq X$ quelconque. Si $A \cap B \neq \emptyset$ et $A \cap B^c \neq \emptyset$ alors $A \cap \partial B \neq \emptyset$.*

Résultats de stabilité : réunion quelconque de connexes d'intersection totale non vide.

chaîne finie de connexes.

Lemme 5.4. *Soit X et Y des espaces métriques, et munissons $X \times Y$ de la distance d_∞. Soit $A \subseteq X \times Y$ et $x \in X$.*

Si A est ouvert alors $A_x = \{y \in Y : (x, y) \in A\}$ et ouvert. Si A est fermé alors A_x l'est aussi.

Proposition 5.5. *Soit X et Y des espaces métriques connexes. Alors $X \times Y$ muni de la distance d_∞ est connexe.*

Démonstration. Supposons que $A \subseteq X \times Y$ soit ouvert-fermé non-vide.

Supposons que $(x, y) \in A$. Alors $y \in A_x$, donc $A_x \subseteq Y$ est un ouvert-fermé non vide, donc $A_x = Y$. Autrement dit, $\{x\} \times Y \subseteq A$. D'après le même raisonnement, on sait maintenant pour tout $y' \in Y$ que $(x, y') \in A$, et on en déduit que $X \times \{y'\} \subseteq A$. Ainsi $X \times Y \subseteq A$, i.e., $X \times Y = A$. □

L'image d'un connexe par une application continue est un connexe.

Tout ensemble coincé entre un connexe et son adhérence est connexe.

Les connexes de $\mathbf{R}$ sont les intervalles. Conséquences : théorème des valeurs intermédiaires et théorème du point fixe de Brouwer en dimension 1.

Définition 5.6. Composante connexe d'un point.

5.2 Connexité par arcs

Le « modèle » d'un espace non connexe : $\{0,1\}$. Le « modèle » d'un espace connexe : $[0,1]$.

Définition 5.7. On dit que deux points $x, y \in X$ sont **reliés par un arc** s'il existe une application continue $f\colon [0,1] \to X$ telle que $f(0) = x$ et $f(y) = 1$. Dans ce cours on le notera $x \sim y$ (notation non standard).

On dit que X est **connexe par arcs** si tous deux points sont reliés par un arc.

C'est une relation d'équivalence.

La connexité par arcs entraîne la connexité.

Réciproque pour les ouverts connexes d'un espace vectoriel normé. Un ouvert quelconque d'un e.v.n. est une réunion disjointe d'ouverts connexes.

Contre-exemple pour le cas général.

Deuxième partie

Équations différentielles ordinaires

Chapitre 6

Définitions

EDO d'ordre n, sur un intervalle $I \subseteq \mathbf{R}$. Si $x \colon I \to \mathbf{R}^N$, on appelle $\mathbf{R}^N$ l'espace de phases.
Notations possibles : $x(t)$, ou $y(x)$.
Souvent (mais pas toujours), t représente le **temps**.
ED scalaire
ED normale
ED autonome
ED linéaire.

Example.

$$x' = f(t, x)$$

$$x' = f(x)$$

Définition 6.1. Solution (ou intégrale) sur un intervalle.
Courbe intégrale / orbite d'une solution.

Prolongement d'une solution.
Solution maximale sur un intervalle.
Solution globale.
Réduction à l'ordre 1.

Proposition 6.2. *Considérons une équation scalaire autonome d'ordre 1 :*

$$x' = f(x), \tag{6.1}$$

(i) *Si $x_0 \in \mathbf{R}$ est une racine de f (i.e., si) $f(x_0) = 0$, alors la fonction constante $x \equiv x_0$ est une solution de Equation 6.1.*

(ii) *Supposant que f est continue, toute solution de Equation 6.1 est monotone.*

Chapitre 7

Solutions explicites

7.1 Équations à variables séparées

Une équation à variables séparées est une équation de la forme

$$b(x)x' = a(t).$$

Théorème 7.1. *Considérons l'équation*

$$b(x)x' = a(t)$$

où a est une fonction continue sur un intervalle I et b une fonction continue sur un intervalle J. Soit A et B des primitives de a et de b.

Alors (x, I) est une solution ssi :

— *$x\colon I \to J$ est dérivable sur I et*

— *Il existe une constante c telle que :*

$$B\big(x(t)\big) = A(t) + c$$

pour $t \in I$.

Théorème 7.2. *Continuant le Théorème précédent, supposons que*

— *$x\colon I \to J$ est continue et vérifie*

$$B\big(x(t)\big) = A(t) + c$$

pour $t \in I$, et

— *$b\big(x(t)\big) \neq 0$ pour tout $t \in I$.*

Alors x est dérivable sur I, et par conséquent, (x, I) est une solution.

Démonstration. On montre que

$$x'(t) = a(t)/b\big(x(t)\big).$$

□

7.2 Équations linéaires du 1er ordre

Forme générale.

Équations linéaires homogènes. $x \equiv 0$ est toujours une solution : c'est la **solution triviale**. Si on exclut $x = 0$ et $a(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$, c'est une équation à variables séparées.

Proposition 7.3. *Soit a et b continues sur I et $a(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. Soit $t_0 \in I$. Les solutions sur I de*

$$a(t)x' + b(t)x = 0,$$

sont :

$$x(t) = x_0 e^{F(t)},$$

où

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} -\frac{b(s)}{a(s)} ds.$$

Une solution qui s'annule en un point s'annule partout (c'est la solution triviale).

.....

7.2.1 Équation aux différentielles totales

Définition 7.4. Équation aux différentielles totales

$$a(t,x) + b(t,x)x' = 0$$

S'il existe w tq...

Les solutions sont les solutions de $w(t,x) = c$, avec c une constante.

Théorème 7.5. *Si $\partial w/\partial x \neq 0$ en (t_0, x_0), il existe une solution tel que $x(t_0) = x_0$, obtenue en résolvant $w(t,x) = w(t_0, x_0)$ pour x.*

Démonstration. Thm de la fonction implicite. □

Théorème 7.6. *CNS pour une différentielle totale.*

Définition 7.7. Facteur intégrant.

Rmk : l'équation des facteurs intégrants.

Chapitre 8

Lemme de Grönwall

Soit $I = [t_0, t_1]$.

Théorème 8.1 (Inégalité différentielle). *Si* $a, b \in C(I, \mathbf{R})$ *et* $x \in C^1(I, \mathbf{R})$, *t.q.*

$$x'(t) \leq a(t)x(t) + b(t)$$

alors

$$x(t) \leq x(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(r)dr\right) + \int_{t_0}^{t_1} \exp\left(\int_{s}^{t} a(r)dr\right) b(s)ds$$

Théorème 8.2 (Inégalité intégrale). *Si* $a \in C(I, \mathbf{R}^+)$ *et* $x, c \in C(I, \mathbf{R})$, *t.q.*

$$x(t) \leq c(t) + \int_{t_0}^{t} a(s)x(s)ds$$

alors

$$x(t) \leq c(t) + \int_{t_0}^{t_1} c(s)a(s) \exp\left(\int_{s}^{t} a(r)dr\right) ds.$$

Chapitre 9

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Remarque 9.1. Si E est un Banach et $f\colon [t_0, t_1]$ est continue, on peut bien définir

$$\int_{t_0}^{t_1} f(s)ds,$$

et on a

$$\left\| \int_{t_0}^{t_1} f(s)ds \right\| \leq \int_{t_0}^{t_1} \|f(s)\|ds.$$

Dans le case où $E = \mathbf{R}^n$, l'intégrale est définie coordonnée par coordonnée, et l'inégalité se démontre facilement pour $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ (exercice).

Remarque 9.2. Soit E un Banach et X un espace topologique. On définit $C_b(X, E)$ comme l'espace vectoriel des applications continues **bornées** $f\colon X \to E$. On le munit de la norme :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

On a vu que pour $E = \mathbf{R}$, l'espace $C_b(X, \mathbf{R})$ est un Banach. Le même argument montre que $C_b(X, \mathbf{R})$ est un Banach pour un espace de Banach E quelconque.

Définition 9.3. Problème de Cauchy sur $I \times U$.

Définition 9.4. Fonction $f(t, x)$ localement Lipschitzienne en la variable x.

Théorème 9.5 (Cauchy-Lipschitz)**.** *Condition supplémentaire.*
Existence près de (t_0, x_0)
Unicité.
Régularité.

Démonstration. Puisque toutes les normes sur $\mathbf{R}^n$ sont équivalentes, on le munit de la norme $\|\cdot\|_1$.

I. $C = [t_0 - r, t_0 + r] \times \overline{B}(x_0, R) \subseteq I \times U$, t.q. $\|f\| \leq M$ Condition de Lipschitz vérifiée. On essaiera de rester toujours dans C. Pour cela, comme on peut remplacer r par un plus petit, on exige que $r \leq R/M$.

II. On cherche x tq

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\bigl(s, x(s)\bigr)\, ds \tag{9.1}$$

On pose :

$$x^0 \equiv x_0 \tag{9.2}$$

$$x^{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x^n(s)\big)\, ds \tag{9.3}$$

on vérifie que pour $|t - t_0| \leq r$ on ait $x^{n+1}(t) \in \overline{B}(x_0, R)$.

III. On montre par récurrence que

$$\left\| x^{n+1}(t) - x^n(t) \right\| \leq \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!} \leq \frac{r^n L^n}{n!} \tag{9.4}$$

In en découle que (x^n) est une suite de Cauchy dans $C([t-r, t+r], E)$ Soit x sa limite. D'après le thm de la convergence dominée on peut passer à la limite dans Equation 9.2, d'où Equation 9.1.

Unicité : Lemme de Grönwall (intégrale avec C=0)

Régularité : facile. ◻

Corollaire 9.6 (Unicité des solutions)**.** *Supposons que $f(t, x)$ est localement lipschitzienne par rapport à x à chaque point de $I \times U$. Si (x_1, J_1) et (x_2, J_2) sont des solutions de $x' = f(t, x)$, et $t_0 \in J_1 \cap J_2$ est tel que $x_1(t_0) = x_2(t_0)$, alors $x_1 = x_2$ sur $J_1 \cap J_2$.*

Démonstration. Connexité. ◻

Corollaire 9.7. *Conséquence : existence d'une* **solution maximale***.*

Lemme 9.8. *Supposons que f soit continue, bornée et lipschitzienne par rapport à x dans un intervalle*