

Symétries et lois de conservation

ou le premier théorème de Noether

Sylvie Benzoni-Gavage

12 mars 2010

Résumé

Le (premier) théorème de Noether portant sur le lien entre symétries et lois de conservation est aujourd'hui couramment invoqué dans divers domaines, notamment en mécanique et mathématiques appliquées. On en donne ici quelques illustrations simples, aussi bien dans un contexte variationnel (correspondant à la version d'origine) que dans une version hamiltonnienne (se rapportant à Noether à travers la notion de symétrie généralisée).

1 Introduction

Ces notes se veulent être une introduction élémentaire (et donc forcément réductrice) à ce que l'on appelle aujourd'hui « le » théorème de Noether en référence au théorème I de l'article intitulé *Invariante Variationsprobleme*, publié par Emmy Noether en 1918 et dont une traduction richement commentée se trouve dans le livre d'Y. Kosmann-Schwarzbach [3]. La présentation qui suit ne prétend en aucune façon refléter la portée des résultats d'E. Noether dans toute leur généralité. Le lecteur insatisfait pourra se reporter au livre précité pour le contenu original et une perspective historique, ou au livre de P. Olver [5] pour un exposé mathématique moderne et détaillé, dont ces notes sont largement inspirées.

Précisons tout d'abord que les « symétries » dont il s'agit ne sont pas celles du langage courant (comme les symétries centrales ou axiales). D'ailleurs ce terme de symétrie n'est pas employé par Noether, qui parle plutôt d'invariance sous l'action d'un groupe continu, encore appelé groupe de Lie. Ne présupposant aucune connaissance des groupes de Lie de la part du lecteur, on se concentrera simplement ici (et c'est une première réduction) sur l'action du groupe $(\mathbb{R}, +)$.

Un énoncé très vague du théorème de Noether est le suivant : l'invariance d'un modèle est équivalente à l'existence d'une quantité conservée. L'objectif est de donner corps à cet énoncé pour deux types de modèles :

- les problèmes variationnels et les équations d'Euler-Lagrange associées, qui relèvent directement de l'article de Noether,
- les équations différentielles (ordinaires ou aux dérivées partielles) hamiltonniennes.

Pour reprendre les termes (traduits en français) de Noether, *toutes les fonctions considérées seront supposées analytiques ou tout au moins continues et continûment différentiables un nombre fini [assez grand] de fois.*

2 Version variationnelle

2.1 En dimension un

Considérons pour commencer une fonctionnelle \mathcal{L} de la forme

$$\mathcal{L}[\mathbf{q}] := \int_a^b L(\mathbf{q}(t), \mathbf{q}'(t)) dt, \quad \text{où } L : \mathbf{U} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mapsto L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

est supposée aussi régulière que nécessaire, comme toutes les fonctions définies par la suite, \mathbf{U} est un ouvert de \mathbb{R}^n et $-\infty \leq a < b \leq \infty$. On appelle *extrémale* de \mathcal{L} une fonction $t \in [a, b] \mapsto \mathbf{q}(t)$ qui minimise $\mathcal{L}[\mathbf{q}]$ à $\mathbf{q}(a)$ et $\mathbf{q}(b)$ fixés. Si \mathbf{q} est un extrémale alors nécessairement, pour toute fonction \mathbf{h} s'annulant en a et b on doit avoir

$$\frac{d}{d\theta} \mathcal{L}[\mathbf{q} + \theta \mathbf{h}]|_{\theta=0} = 0.$$

La formule de dérivation des fonctions composées, une intégration par parties et le lemme fondamental du calcul intégral montrent que cette condition nécessaire équivaut à l'équation d'Euler-Lagrange

$$(E_j L)(\mathbf{q}) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad \text{où } E_j L := \frac{\partial L}{\partial q_j} - D_t \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right),$$

le symbole D_t désignant la *dérivée totale* par rapport à t , de sorte que pour une fonction $t \mapsto \mathbf{q}(t)$,

$$(E_j L)(\mathbf{q})(t) = \frac{\partial L}{\partial q_j}(\mathbf{q}(t), \mathbf{q}'(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\mathbf{q}(t), \mathbf{q}'(t)) \right).$$

Proposition 1 (théorème de Noether simplifié à l'extrême). *Supposons qu'il existe une famille à un paramètre de difféomorphismes φ^s de \mathbf{U} telle que $\varphi^0 = \text{Id}_{\mathbf{U}}$ et pour tout s , pour tout $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ on ait*

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = L(\varphi^s(\mathbf{q}), d\varphi^s(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}).$$

Alors la fonction

$$P : (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mapsto \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \phi_j(\mathbf{q}), \quad \text{où } \phi_j(\mathbf{q}) := \frac{d}{ds} \varphi_j^s(\mathbf{q})|_{s=0},$$

est une intégrale première de l'équation d'Euler-Lagrange de \mathcal{L} , c'est-à-dire que la quantité $P(\mathbf{q}(t), \mathbf{q}'(t))$ est conservée au cours du temps t , quelle que soit la solution \mathbf{q} (de l'équation d'Euler-Lagrange de \mathcal{L}).

Démonstration. C'est un exercice de calcul différentiel. Si \mathbf{q} est une solution de l'équation d'Euler-Lagrange de \mathcal{L} on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P(\mathbf{q}(t), \mathbf{q}'(t)) &= \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\mathbf{q}(t), \mathbf{q}'(t)) \right) \phi_j(\mathbf{q}(t)) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\mathbf{q}(t), \mathbf{q}'(t)) \frac{d}{dt} \phi_j(\mathbf{q}(t)) = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_j}(\mathbf{q}(t), \mathbf{q}'(t)) \phi_j(\mathbf{q}(t)) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\mathbf{q}(t), \mathbf{q}'(t)) \frac{d}{dt} \phi_j(\mathbf{q}(t)). \end{aligned}$$

Par ailleurs, en dérivant $L(\mathbf{q}(t), \mathbf{q}'(t)) = L(\varphi^s(\mathbf{q}(t)), d\varphi^s(\mathbf{q}(t)) \cdot \mathbf{q}'(t))$ par rapport à s on obtient, en $s = 0$,

$$0 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_j}(\mathbf{q}(t), \mathbf{q}'(t)) \phi_j(\mathbf{q}(t)) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\mathbf{q}(t), \mathbf{q}'(t)) \frac{d}{ds} (d\varphi^s(\mathbf{q}(t)) \cdot \mathbf{q}'(t))|_{s=0}.$$

On conclut en observant que (par la formule de dérivation des fonctions composées et le lemme de Schwarz sur les dérivées croisées)

$$\frac{d}{ds} (d\varphi^s(\mathbf{q}(t)) \cdot \mathbf{q}'(t))|_{s=0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{ds} \varphi_j^s(\mathbf{q})|_{s=0} \right) = \frac{d}{dt} \phi_j(\mathbf{q}(t)).$$

□

Exemple 1. Lorsque L ne dépend pas d'une certaine variable q_k (on dit que c'est une variable cyclique), on peut prendre

$$\varphi^s(\mathbf{q}) = (q_1, \dots, q_{k-1}, q_k + s, q_{k+1}, \dots, q_n),$$

de sorte que $\phi_j = \delta_j^k$ (symbole de Kronecker). La fonction P de la proposition n'est alors autre que l'intégrale première évidente $\partial L / \partial \dot{q}_k$.

Plus généralement, Noether dit que son théorème *contient tous les théorèmes connus en mécanique etc. au sujet des intégrales premières*, mais sa portée est bien plus grande.

2.2 En plusieurs dimensions

Considérons maintenant une fonctionnelle \mathcal{L} de la forme

$$\mathcal{L}[\mathbf{q}] := \int_{\Omega} L(\mathbf{q}(\mathbf{x}), \nabla \mathbf{q}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x}, \quad \text{où } L : \mathbf{U} \times \mathbb{R}^{d \times n} \rightarrow \mathbb{R}$$

et $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Les extrémales de \mathcal{L} sont définies comme les fonctions \mathbf{q} minimisant L à $\mathbf{q}|_{\partial\Omega}$ fixé. Une condition nécessaire est encore donnée par l'équation d'Euler-Lagrange

$$(E_j L)(\mathbf{q}) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad \text{où } E_j L := \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_j} - \sum_{i=1}^d D_i \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_{j,i}} \right),$$

le symbole D_i désignant la *dérivée totale* par rapport à la variable $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$, et $\mathbf{q}_{j,i}$ correspondant à la dérivée partielle $\partial \mathbf{q}_j / \partial \mathbf{x}_i$. (Noter que l'équation d'Euler-Lagrange est ici une équation aux dérivées partielles et non plus une équation différentielle ordinaire comme au paragraphe précédent.)

Proposition 2 (théorème de Noether très simplifié). *Supposons qu'il existe une famille à un paramètre de difféomorphismes φ^s de \mathbf{U} telle que $\varphi^0 = \text{Id}_{\mathbf{U}}$ et pour tout s , pour toute fonction \mathbf{q} (solution de l'équation d'Euler-Lagrange de \mathcal{L}) on ait*

$$L(\mathbf{q}, \nabla \mathbf{q}) = L(\varphi^s(\mathbf{q}), \nabla(\varphi^s(\mathbf{q}))).$$

Alors les fonctions

$$P_i := \sum_{j=1}^n \phi_j \frac{\partial L}{\partial q_{j,i}}, \quad \text{où } \phi_j(\mathbf{q}) := \frac{d}{ds} \varphi_j^s(\mathbf{q})|_{s=0},$$

sont telles que

$$\sum_{i=1}^d D_i(P_i(\mathbf{q}, \nabla \mathbf{q})) = 0$$

quelle que soit la solution \mathbf{q} de l'équation d'Euler-Lagrange de \mathcal{L} .

Autrement dit, si l'on note \mathbf{P} la fonction vectorielle de composantes P_1, \dots, P_d , elle vérifie la *loi de conservation* $\text{Div} \mathbf{P} = 0$ « le long » des solutions de l'Euler-Lagrange de \mathcal{L} : les lois de conservation sont aux équations aux dérivées partielles ce que sont les intégrales premières aux équations différentielles ordinaires.

Nous allons voir un résultat plus précis (théorème 1). Mais avant cela, introduisons un peu de vocabulaire et quelques notations supplémentaires.

Définition 1. *On appelle groupe de transformations à un paramètre une famille de difféomorphismes φ^s telle que $\varphi^0 = \text{Id}$ et $\varphi^{s+r} = \varphi^s \circ \varphi^r$ quels que soient s et $r \in \mathbb{R}$. On parle de groupe local de transformations à un paramètre si φ^s est défini pour s voisin de 0 seulement.*

L'exemple « canonique » de groupe de transformations à un paramètre est donné par le flot d'une équation différentielle autonome : si

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{q} &\mapsto (\phi_1(\mathbf{q}), \dots, \phi_n(\mathbf{q})) \end{aligned}$$

est une fonction telle que toutes les solutions de l'équation différentielle

$$\frac{d\mathbf{q}}{ds} = \phi(\mathbf{q}) \tag{1}$$

sont globales, on définit le flot φ^s de (1) en résolvant pour chaque \mathbf{q} le problème de Cauchy

$$\frac{d}{ds} \varphi^s(\mathbf{q}) = \phi(\varphi^s(\mathbf{q})), \quad \varphi^0(\mathbf{q}) = \mathbf{q}.$$

La propriété de groupe $\varphi^{s+r} = \varphi^s \circ \varphi^r$ provient de l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, et le fait que φ^s soit un difféomorphisme pour tout s vient de ce que $\mathbf{M}(s) := d\varphi^s(\mathbf{q})$ est solution du problème de Cauchy linéaire :

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} = d\phi(\varphi^s(\mathbf{q})) \circ \mathbf{M}, \quad \mathbf{M}(0) = \text{Id}.$$

On parle indifféremment du flot de l'équation différentielle (1) ou du flot du champ de vecteurs de composantes ϕ_1, \dots, ϕ_n , qu'il est d'usage de noter

$$\sum_{j=1}^n \phi_j \frac{\partial}{\partial q_j},$$

c'est-à-dire que $\frac{\partial}{\partial q_j}$ désigne le vecteur unitaire dirigeant l'axe des q_j dans \mathbb{R}^n . Observons que par définition, on a

$$\frac{d}{ds} \varphi_j^s(\mathbf{q})|_{s=0} = \phi_j(\mathbf{q}) \quad (2)$$

(ce qui est cohérent avec les notations utilisées plus haut). Inversement, si φ^s est un groupe de transformations à un paramètre, en définissant les fonctions ϕ_j par la formule (2) ci-dessus, on vérifie (en utilisant la propriété de groupe et à nouveau l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz) que φ^s est le flot (local) du champ de vecteurs

$$\mathbf{v} := \sum_{j=1}^n \phi_j \frac{\partial}{\partial q_j}. \quad (3)$$

Définition 2. On appelle générateur infinitésimal d'un groupe local de transformations à un paramètre φ^s le champ de vecteurs défini par les formules (2)-(3) ci-dessus.

Ce qui précède vaut bien sûr en remplaçant \mathbb{R}^n par l'espace de grande dimension $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$, dont les groupes de transformation à un paramètre ont alors des générateurs infinitésimaux de la forme

$$\mathbf{v} := \sum_{i=1}^d \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \phi_j \frac{\partial}{\partial q_j}.$$

Dans cette classe, les champs de la forme (3) (c'est-à-dire pour lesquels toutes les fonctions ξ_i sont nulles) sont assez naturellement appelés *champs verticaux* (ou « *evolutionary vector fields* » chez Olver).

À tout champ de vecteurs on peut associer un « représentant vertical », dont on verra qu'il joue un rôle important dans le théorème de Noether, qui est en fait un *champ de vecteurs généralisé* au sens où ses composantes dépendent non seulement de (\mathbf{x}, \mathbf{q}) mais aussi des $q_{j,i}$ avec la notation introduite plus haut (pour $\partial q_j / \partial x_i$ si $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x})$).

Définition 3. On appelle représentant vertical d'un champ de vecteurs

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^d \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \phi_j \frac{\partial}{\partial q_j}$$

le champ de vecteurs généralisé

$$\mathbf{v}_Q := \sum_{j=1}^n Q_j \frac{\partial}{\partial q_j}, \quad \text{où } Q_j := \phi_j - \sum_{i=1}^d \xi_i q_{j,i}.$$

La fonction vectorielle $Q : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{d \times n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de composantes Q_1, \dots, Q_n est appelée caractéristique de \mathbf{v} .

Exemple 2. Le générateur infinitésimal du groupe de translations $x_k \mapsto x_k + s$ est

$$\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \text{de représentant vertical} \quad - \sum_{j=1}^n q_{j,k} \frac{\partial}{\partial q_j}.$$

Exemple 3. En dimension $d = 2$, le générateur infinitésimal du groupe de rotations $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 \cos s - x_2 \sin s, x_1 \sin s + x_2 \cos s)$ est

$$-x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \text{de représentant vertical} \quad \sum_{j=1}^n (x_2 q_{j,1} - x_1 q_{j,2}) \frac{\partial}{\partial q_j}.$$

Exemple 4. En dimension $d = 2$, en notant $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ les variables dites indépendantes et pour $n = 1$, en notant $u \in \mathbb{R}$ la variable dite dépendante, le générateur infinitésimal du groupe de transformations galiléennes $(t, x, u) \mapsto (t, x + st, u - s)$ est

$$t \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}, \quad \text{de représentant vertical} \quad - (1 + tu_x) \frac{\partial}{\partial u}$$

(où la notation u_x correspond à $\partial u / \partial x$).

Certains groupes de transformations sont définis par l'action d'un autre groupe que $(\mathbb{R}, +)$. Ceci revient à remplacer 0 par le neutre du groupe et $+$ par sa loi dans la définition 1. Par exemple, les changements d'échelle sont naturellement définis par une action du groupe (\mathbb{R}^*, \times) (même si bien sûr on peut se ramener à une action du groupe $(\mathbb{R}, +)$ via la fonction exponentielle).

Exemple 5. En reprenant les notations de l'exemple 4, le générateur infinitésimal du groupe de changements d'échelle $(t, x, u) \mapsto (\lambda^3 t, \lambda x, \lambda^{-2} u)$ est

$$3t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - 2u \frac{\partial}{\partial u}, \quad \text{de représentant vertical} \quad - (3tu_t + xu_x - 2u) \frac{\partial}{\partial u}.$$

Théorème 1 (Noether dans un cas particulier). Si une fonctionnelle \mathcal{L} de la forme

$$\mathcal{L}[q] := \int_{\Omega} L(x, q(x), \nabla q(x)) dx, \quad \text{où } L : \Omega \times \mathbf{U} \times \mathbb{R}^{d \times n} \rightarrow \mathbb{R}$$

est invariante par un groupe local de transformations engendré par

$$v = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \phi_j \frac{\partial}{\partial q_j},$$

alors la fonction vectorielle P de composantes P_1, \dots, P_d définies par

$$P_i := \sum_{j=1}^n Q_j \frac{\partial L}{\partial q_{j,i}} + \xi_i L, \quad Q_j := \phi_j - \sum_{i=1}^d \xi_i q_{j,i},$$

est telle que

$$\text{Div} P + \sum_{j=1}^n Q_j E_j L = 0.$$

On renvoie à [5, p. 253] pour la signification précise de l'invariance de \mathcal{L} , et aux pages 272–274 du même livre pour un énoncé un peu plus général du théorème (pour un lagrangien dépendant de dérivées d'ordre plus élevé) et sa démonstration (moyennant des outils algébriques introduits dans les chapitres précédents). En fait le « vrai » théorème de Noether est encore plus général : il prend notamment en compte des *champs de vecteurs généralisés*, dont les coefficients ξ_i et ϕ_j peuvent dépendre aussi des dérivées de \mathbf{q} , et comporte une réciproque. Pour le résumer, *les classes d'équivalence des lois de conservation non triviales pour l'équation d'Euler-Lagrange sont en bijection avec les classes d'équivalence des symétries variationnelles de la fonctionnelle* [5, p. 334].

2.3 Application en mécanique des fluides

Considérons un fluide à l'équilibre, c'est-à-dire de vitesse nulle et de densité ρ indépendante de \mathbf{t} , dans un état isotherme ou adiabatique. On suppose que son énergie (libre si isotherme, interne si adiabatique) par unité de volume L dépend de ρ (cas classique) et de $\nabla\rho$ (pour tenir compte de la capillarité en suivant Korteweg). Alors son énergie totale $\mathcal{L} = \int L(\rho, \nabla\rho)$ est invariante par toute translation en espace. Considérons les translations dans une direction \mathbf{x}_k , engendrées par le champ $\mathbf{v}^k = \partial/\partial\mathbf{x}_k$, de caractéristique $Q^k = -\rho_{,k}$. Alors le théorème 1 (dans le cas $\mathbf{n} = 1$) montre que

$$\text{Div}\mathbf{P}^k - \rho_{,k} \text{EL} = 0, \quad \text{où } P_i^k := \delta_i^k L - \rho_{,k} \frac{\partial L}{\partial \rho_{,i}}. \quad (4)$$

Si ρ était une extrémale de \mathcal{L} , on aurait $(\text{EL})(\rho) = 0$ et on déduirait de (4) la loi de conservation $\text{Div}\mathbf{P}^k = 0$. Mais physiquement ρ n'est qu'une extrémale sous contrainte de masse $\int \rho$. Par suite $(\text{EL})(\rho) = \lambda$, le multiplicateur de Lagrange associé à cette contrainte. On obtient ainsi la loi de conservation $\text{Div}\mathbf{K}^k = 0$ avec

$$K_i^k := \delta_i^k (L - \rho (\text{EL})(\rho)) - \rho_{,k} \frac{\partial L}{\partial \rho_{,i}},$$

ou de façon plus explicite,

$$K_i^k := \delta_i^k (L - \rho \frac{\partial L}{\partial \rho} + \rho \text{Div}\psi) - \rho_{,k} \frac{\partial L}{\partial \rho_{,i}}, \quad \text{où } \psi_i := \frac{\partial L}{\partial \rho_{,i}}.$$

Autrement dit, on a

$$\text{Div}\mathbf{K} = 0, \quad \text{où } \mathbf{K} := \left(L - \rho \frac{\partial L}{\partial \rho} \right) \mathbf{I} + \rho \text{Div}\psi \mathbf{I} - \nabla\rho \otimes \psi.$$

Lorsque L ne dépend pas de $\nabla\rho$, le tenseur (des contraintes) \mathbf{K} se réduit à $-\mathbf{p} \mathbf{I}$ où

$$\mathbf{p} := \rho \frac{\partial L}{\partial \rho} - L \quad (5)$$

est la pression du fluide. Lorsque L dépend effectivement de $\nabla\rho$, on obtient le tenseur de Korteweg

$$\mathbf{K} = -\mathbf{p} \mathbf{I} + \rho \text{Div}\psi \mathbf{I} - \nabla\rho \otimes \psi,$$

où \mathbf{p} définie par (5) est une pression généralisée (dépendant de $\nabla\rho$).

3 Version hamiltonnienne

3.1 Équations différentielles ordinaires

Proposition 3. *Étant donnés deux champs de vecteurs dans \mathbb{R}^N :*

$$v = \sum_{j=1}^N \phi_j \frac{\partial}{\partial u_j}, \quad w = \sum_{j=1}^N \psi_j \frac{\partial}{\partial u_j},$$

l'ensemble des courbes intégrales de w (c'est-à-dire les trajectoires décrites par les solutions de l'équation différentielle autonome $u' = \psi(u)$) est invariant par le flot de v si et seulement si leur crochet de Lie

$$[v, w] := \sum_{j,k=1}^N \left(\phi_k \frac{\partial \psi_j}{\partial u_k} - \psi_k \frac{\partial \phi_j}{\partial u_k} \right) \frac{\partial}{\partial u_j}$$

est identiquement nul.

Démonstration. Si l'on note φ^s le flot de v , l'invariance des courbes intégrales de w par φ^s signifie que pour tout s et pour toute fonction $t \mapsto u(t)$ solution de $u' = \psi(u)$, la fonction $t \mapsto \varphi^s(u(t))$ est encore solution, c'est-à-dire que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\frac{d}{dt} \varphi_j^s(u(t)) = \psi_j(\varphi^s(u(t))).$$

En dérivant par rapport à s on en déduit, en $s = 0$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial u_k}(u(t)) \psi_k(u(t)) = \frac{d}{dt} \phi_j(u(t)) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_j}{\partial u_k}(u(t)) \phi_k(u(t)),$$

ce qui montre que $[v, w]$ est nul en $u(t)$. Inversement, montrons que si $[v, w] = 0$ alors pour toute fonction $t \mapsto u(t)$ solution de $u' = \psi(u)$, la fonction $U : (t, s) \mapsto \varphi^s(u(t))$ vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t} U_j(t, s) = \psi_j(U(t, s)).$$

Par hypothèse sur u , cette égalité est vraie en $s = 0$. Pour montrer qu'elle l'est quel que soit s , montrons que $s \mapsto \partial_t U - \psi(U)$ est solution d'une équation différentielle linéaire.

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial U}{\partial t} - \psi(U(t, s)) \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U}{\partial s} \right) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial u_k}(U) \frac{\partial u_k}{\partial s} = \\ \frac{\partial}{\partial t} (\phi(U(t, s))) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial u_k}(U) \phi_k(U(t, s)) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial u_k}(U) \left(\frac{\partial U_k}{\partial t} - \psi_k(U(t, s)) \right) \end{aligned}$$

en utilisant une fois de plus la règle de dérivation des fonctions composées pour le 1er terme et grâce à l'égalité $[v, w] = 0$ pour le 2ème. \square

Considérons un système différentiel hamiltonnien sous forme canonique :

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}(q, p), \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(q, p), \quad j = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Les solutions de (6) sont par définition les courbes intégrales du *champ de vecteurs hamiltonnien*

$$\widehat{v}_H := \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q_j} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial p_j}.$$

Définition 4. On appelle groupe de symétries de (6) un groupe local de transformations laissant invariant l'ensemble des courbes intégrales de \widehat{v}_H .

D'après la proposition 3, un champ de vecteurs v engendre un groupe de symétries de (6) si et seulement si $[v, \widehat{v}_H] = 0$. En particulier, un champ de vecteurs hamiltonnien \widehat{v}_R engendre un groupe de symétries de (6) si et seulement si $[\widehat{v}_R, \widehat{v}_H] = 0$.

Proposition 4. Quelles que soient les fonctions H et $R : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, le crochet de Lie $[\widehat{v}_R, \widehat{v}_H]$ est un champ de vecteurs hamiltonniens, et plus précisément

$$[\widehat{v}_R, \widehat{v}_H] = \widehat{v}_{\{H, R\}}, \quad \text{où } \{H, R\} := \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial R}{\partial p_j} - \frac{\partial R}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} \right).$$

Démonstration. En identifiant les champs de vecteurs avec des opérateurs différentiels, on observe que pour toute fonction f , d'une part

$$\widehat{v}_R(f) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial R}{\partial p_j} \frac{\partial f}{\partial q_j} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} = \{f, R\},$$

et d'autre part

$$[\widehat{v}_R, \widehat{v}_H](f) = \widehat{v}_R(\widehat{v}_H(f)) - \widehat{v}_H(\widehat{v}_R(f)).$$

Par suite, on a

$$[\widehat{v}_R, \widehat{v}_H](f) = \{\{f, H\}, R\} - \{\{f, R\}, H\} = \{f, \{H, R\}\}$$

d'après l'anti-symétrie et l'identité de Jacobi (que l'on admet ici) pour le *crochet de Poisson* $\{, \}$. \square

Un corollaire immédiat des propositions 3 et 4 est que \widehat{v}_R engendre un groupe de symétries de (6) si et seulement si le crochet de Poisson $\{H, R\}$ est constant. Par ailleurs, on remarque (par la règle de dérivation des fonctions composées) que pour toute solution $t \mapsto (q(t), p(t))$ de (6) on a

$$\frac{d}{dt} R(q(t), p(t)) = \{R, H\}(q(t), p(t)). \quad (7)$$

Ceci conduit à une « version hamiltonnienne du théorème de Noether » :

Proposition 5. Si R est une intégrale première de (6), alors le champ \widehat{v}_H admet un groupe de symétries engendré par \widehat{v}_R . Plus précisément, \widehat{v}_R engendre un groupe de symétries pour \widehat{v}_H si et seulement s'il existe une constante c telle que $(t, q, p) \mapsto R(q, p) - ct$ soit constante le long des solutions de (6).

Le hamiltonnien H est évidemment une intégrale première de (6).

3.2 Équations aux dérivées partielles d'évolution

Pour les équations aux dérivées partielles d'évolution, il n'y a pas de structure hamiltonnienne canonique, pour autant qu'il en existe au moins une.

Définition 5. *On dit qu'une équation aux dérivées partielles d'évolution admet une structure hamiltonnienne si elle s'écrit*

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{J} \delta \mathcal{H}[\mathbf{u}], \quad (8)$$

où \mathcal{H} est une fonctionnelle de la forme

$$\mathcal{H}[\mathbf{u}] = \int_{\mathbb{R}^d} H(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}), \dots, \nabla^m \mathbf{u}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x},$$

de gradient variationnel

$$\delta \mathcal{H} := \begin{pmatrix} E_1 H \\ \vdots \\ E_n H \end{pmatrix}$$

et \mathbf{J} est un opérateur hamiltonnien, c'est-à-dire un opérateur différentiel dont les coefficients dépendent éventuellement de $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}, \dots, \nabla^m \mathbf{u})$ mais de telle façon que la formule

$$\{\mathcal{L}, \mathcal{R}\} = \int_{\mathbb{R}^d} \delta \mathcal{L} \cdot \mathbf{J} \delta \mathcal{R} \quad (9)$$

définisse un crochet de Poisson (c'est-à-dire une forme bilinéaire anti-symétrique vérifiant l'identité de Jacobi) sur l'espace des fonctionnelles.

Dans la formule (9), le point \cdot désigne simplement le produit scalaire « canonique » dans \mathbb{R}^n , l'espace des valeurs de \mathbf{u} . Lorsque \mathbf{J} est un opérateur différentiel à coefficients constants, l'identité de Jacobi est automatique (voir [5, p.438]). Il suffit donc de vérifier qu'il est anti-symétrique.

Exemple 6. *L'équation de Korteweg-de Vries (obtenue au XIXème siècle comme modèle de propagation d'onde longue à la surface d'un canal)*

$$\partial_t \mathbf{u} = \mathbf{u} \partial_x \mathbf{u} - \partial_{xxx}^3 \mathbf{u} \quad (10)$$

admet une structure hamiltonnienne avec

$$\mathbf{J} = D_x, \quad \text{et} \quad H(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x) = \frac{1}{6} \mathbf{u}^3 + \frac{1}{2} (\mathbf{u}_x)^2,$$

dont la fonctionnelle \mathcal{H} associée a en effet pour gradient variationnel

$$\delta \mathcal{H} = E H = \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 - \mathbf{u}_{xx}.$$

Étant donné un opérateur hamiltonnien \mathbf{J} et une fonctionnelle \mathcal{R} , on peut considérer le champ de vecteurs hamiltonnien généralisé

$$\hat{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}} := \sum_{j=1}^n Q_j \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_j}, \quad \text{où} \quad Q_j := (\mathbf{J} \delta \mathcal{R})_j.$$

Définition 6. Une fonctionnelle \mathcal{C} est dite de Casimir si $J\delta\mathcal{C}$ est identiquement nul.

En particulier, lorsque $J = D_x$ en dimension $d = 1$, les fonctionnelles de Casimir (aussi appelées « *distinguished functional* » par Olver) sont telles que $\delta\mathcal{C}$ est constante : ce sont les fonctionnelles proportionnelles à la masse $\int u$.

Par ailleurs, d'après la définition (9) du crochet de Poisson, on vérifie que pour une fonctionnelle \mathcal{R} , l'analogue de l'équation (7) le long des solutions de (8) est :

$$\frac{d}{dt}\mathcal{R}[u(t)] = \{\mathcal{R}, \mathcal{H}\}[u(t)]. \quad (11)$$

On voit ainsi que les fonctionnelles de Casimir sont trivialement constantes le long des solutions de (8). De plus, l'équation (11) avec la relation [5, p. 447]

$$[\widehat{v}_{\mathcal{R}}, \widehat{v}_{\mathcal{H}}] = \widehat{v}_{\{\mathcal{H}, \mathcal{R}\}},$$

permettent d'obtenir la généralisation suivante de la proposition 5.

Théorème 2 (version hamiltonnienne de Noether). *Soit v un champ de vecteurs admettant un représentant vertical (selon la définition 3) hamiltonnien $\widehat{v}_{\mathcal{R}}$. C'est le générateur infinitésimal d'un groupe de symétries à un paramètre pour (8) si et seulement s'il existe une fonctionnelle de Casimir \mathcal{C} telle que $\mathcal{R} - \mathfrak{t}\mathcal{C}$ soit conservée le long des solutions de (8).*

Ce théorème met notamment en évidence le lien entre l'invariance par translation en t et la conservation de \mathcal{H} le long des solutions de (8). En effet, le générateur infinitésimal $\partial/\partial t$ des translations en t a pour représentant vertical $-u_t \partial_u$, qui coïncide avec $-\widehat{v}_{\mathcal{H}}$ le long des solutions de (8).

D'une façon analogue, lorsque $J = D_x$ et H ne dépend pas de x , l'invariance par translation en x est liée à la conservation de $\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int u^2$, c'est-à-dire de la norme L^2 , car le représentant vertical de $\partial/\partial x$ est

$$-u_x \partial/\partial u = -\widehat{v}_{\mathcal{K}}.$$

Exemple 7. Si l'on reprend l'équation de Korteweg-de Vries (10), la conservation de la norme L^2 se trouve « à la main » en vérifiant que les solutions régulières satisfont la loi de conservation

$$D_t \left(\frac{1}{2} u^2 \right) + D_x \left(u u_{xx} - \frac{1}{2} (u_x)^2 - \frac{1}{3} u^3 \right) = 0.$$

Toutes les lois de conservation n'étant pas aussi évidentes, le théorème de Noether en fournit facilement d'autres. Par exemple dans le cas $J = D_x$ en dimension $d = 1$ avec invariance par les transformations galiléennes, dont le générateur infinitésimal admet comme représentant vertical

$$-(1 + t u_x) \partial_u = \widehat{v}_{\mathcal{R}}, \quad \text{avec } \mathcal{R} := -(x u + \frac{1}{2} t u^2),$$

une version à peine plus générale du théorème 2 et la conservation de la norme L^2 montrent que le moment d'ordre 1, $\int x u(t, x) dx$ est une fonction affine de t .

Remarque 1. Pour l'équation de Korteweg-de Vries (10), on peut démontrer par une méthode algébrique systématique [5, p. 126] que les seules symétries « ordinaires » (c'est-à-dire dont le générateur infinitésimal a des coefficients indépendants des dérivées de \mathbf{u}) sont l'invariance par

- translation en t (correspondant à la conservation du hamiltonien \mathcal{H}),
- translation en x (correspondant à la conservation de la norme L^2),
- changement de référentiel galiléen (correspondant à la conservation du moment d'ordre 1),
- changement d'échelles (correspondant elle aussi, grâce à l'autre structure hamiltonienne précisée ci-après, à la conservation du moment d'ordre 1).

Si l'on dispose effectivement de deux structures hamiltoniennes, on peut utiliser les deux sens du théorème 2 pour la recherche de lois de conservation et de symétries généralisées non triviales.

Exemple 8. L'équation de Korteweg-de Vries (10) admet comme deuxième formulation hamiltonienne

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{I} \delta \mathcal{H}[\mathbf{u}], \quad \text{avec } \mathbf{I} := -D_x^3 + \frac{2}{3} \mathbf{u} D_x + \frac{1}{3} \mathbf{u}_x.$$

L'antisymétrie de \mathbf{I} est quasiment immédiate :

$$\int z \mathbf{I} y = \int y D_x^3 z + \frac{2}{3} z \mathbf{u} y_x + \frac{1}{3} z \mathbf{u}_x y = - \int z \mathbf{I} y.$$

La vérification de l'identité de Jacobi est quant à elle beaucoup plus délicate : Olver a développé une méthode systématique pour cela, voir [5, p.438-439] pour son application à l'équation Korteweg-de Vries. Soit alors $\mathbf{Q} = \mathbf{I} \delta \mathcal{H}$. Puisque \mathcal{H} est conservée le long des solutions, $v_{\mathbf{Q}}$ est le générateur infinitésimal d'un groupe de symétries (généralisées). Si l'on trouve \mathcal{R} telle que $\mathbf{Q} = \mathbf{J} \delta \mathcal{R}$, \mathcal{R} sera une autre fonctionnelle conservée. Tous calculs faits, on trouve :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{u}_{xxxxx} - \frac{5}{3} \mathbf{u} \mathbf{u}_{xxx} - \frac{10}{3} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_{xx} + \frac{5}{6} \mathbf{u}^2 \mathbf{u}_x,$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{xx}^2 + \frac{5}{6} \mathbf{u} \mathbf{u}_x^2 + \frac{5}{72} \mathbf{u}^4.$$

Remarque 2. La recherche de lois de conservation pour l'équation de Korteweg-de Vries avait fait l'objet d'une sorte de feuilleton durant l'été 1966, dont les acteurs étaient notamment Whitham, Zabusky, Kruskal et Miura (voir [4, p. 9]). Au final, le résultat remarquable est qu'il en existe une infinité, ce que l'on résume en disant que l'équation est complètement intégrable.

En guise de conclusion, signalons que de nombreuses équations aux dérivées partielles hamiltoniennes (dont celles de Korteweg-de Vries) sont connues pour admettre des solutions particulières que l'on appelle des *solitons*. Certaines quantités conservées sont liées à ce que Boussinesq avait appelé *moment d'instabilité* dès le XIXème siècle à propos de

l'équation qui porte aujourd'hui son nom (obtenue avant Korteweg-de Vries, également pour décrire des ondes longues) et jouent un rôle important dans la stabilité des solitons [1, 2, 6]. Enfin plus généralement, les lois de conservation sont cruciales du point de vue de l'analyse de ces EDP : ce sont des outils précieux pour démontrer l'existence globale de solutions, voir par exemple [7].

Références

- [1] T. B. Benjamin. Impulse, flow force and variational principles. *IMA J. Appl. Math.*, 32(1-3) :3–68, 1984.
- [2] M. Grillakis, J. Shatah, and W. Strauss. Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I. *J. Funct. Anal.*, 74(1) :160–197, 1987.
- [3] Yvette Kosmann-Schwarzbach. *Les théorèmes de Noether*, Invariance et lois de conservation au XXe siècle. Avec la collaboration of Laurent Meersseman, Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2ème édition, 2006.
- [4] Alan C. Newell. *Solitons in mathematics and physics*, volume 48 of *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1985.
- [5] Peter J. Olver. *Applications of Lie groups to differential equations*, volume 107 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1993.
- [6] R. L. Pego and M. I. Weinstein. Eigenvalues, and instabilities of solitary waves. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 340(1656) :47–94, 1992.
- [7] Terence Tao. *Nonlinear dispersive equations*, volume 106 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 2006.