Document de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches

Contributions à l'étude des solutions régulières par morceaux des systèmes hyperboliques de lois de conservation.

Sylvie Benzoni

Lyon, juin 1998.

Je dédie ce travail à la mémoire de Roger Gavage (1915-1985).

Remerciements.

Je voudrais avant tout remercier les personnes du comité national du CNRS qui m'ont accordé leur confiance et ainsi permis, par mon recrutement en 1992, de préparer cette habilitation dans des conditions optimales. J'aimerais également remercier Mohand Moussaoui pour la place qu'il m'a accordée dans l'encadrement du DEA d'Analyse Numérique Lyon-Saint Etienne. L'enseignement que j'y ai pratiqué ces dernières années a été très stimulant et source d'équilibre.

D'autre part, je remercie chaleureusement Denis Serre, qui m'a apporté, depuis mes débuts dans la recherche, un soutien sans faille. Je lui suis également très reconnaissante de m'avoir encouragée à me lancer sur des sujets variés et originaux.

Je remercie très sincèrement Pierangelo Marcati, Pierre-Arnaud Raviart et Vitaly Volpert qui, en tant que rapporteurs, ont témoigné, selon leurs sensibilités respectives, d'un vif intérêt pour mon travail.

Je remercie enfin toutes les personnes, en particulier du laboratoire, qui ont contribué par leur présence et leur écoute, à l'élaboration de ce projet.

A Lyon, le 9 juin 1998.

Table des matières

Introduction

Ce travail concerne de façon générale les systèmes de lois de conservation du premier ordre, s'écrivant:

$$\partial_t u + \sum_{\alpha=1}^{d} \partial_{x_\alpha} f^\alpha(u) = 0\,, \tag{0.1}$$

où les *états* $u(x,t)$ sont dans un domaine $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N$, et les *flux* f^α sont des fonctions régulières de $u \in \mathcal{U}$. Les constantes $u(x,t) = \overline{u} \in \mathcal{U}$ sont des solutions triviales de (0.1). L'hypothèse d'*hyperbolicité*, essentielle dans l'analyse de (0.1), assure notamment que le problème de Cauchy associé au système linéarisé autour d'un état constant $\overline{u} \in \mathcal{U}$:

$$\partial_t u + \sum_{\alpha=1}^{d} df^\alpha(\overline{u}) \cdot \partial_{x_\alpha} u = 0\,, \tag{0.2}$$

soit bien posé dans $L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^N)$. Cette hypothèse se traduit géométriquement par:

Définition 1 *Le système (0.1) est dit hyperbolique si, pour tout $\overline{u} \in \mathcal{U}$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, la matrice:*

$$A(\overline{u};\xi) := \sum_{\alpha=1}^{d} \xi_\alpha \, df^\alpha(\overline{u})\,,$$

est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, uniformément par rapport à $(\overline{u};\xi) \in \mathcal{W} \times \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$, quel que soit $\mathcal{W} \subset\subset \mathcal{U}$, relativement compact.

Pour un système en dimension $d = 1$:

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0\,, \tag{0.3}$$

l'hyperbolicité équivaut à la propriété de

$$A(\overline{u}) := df(\overline{u})\,,$$

d'être diagonalisable sur $\mathbb{R}$, localement uniformément par rapport à $\overline{u}$. On définit aussi la notion plus forte de *stricte hyperbolicité*:

Définition 2 *Le système (0.3) est dit strictement hyperbolique si, pour tout $\overline{u} \in \mathcal{U}$, la matrice $A(\overline{u}) = df(\overline{u})$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ à valeurs propres simples.*

En particulier, un système strictement hyperbolique est hyperbolique.
Dans le cas des équations d'Euler:

$$\begin{aligned} &\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0\,, \\ &\partial_t(\rho \vec{u}) + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p(\rho) = 0\,, \end{aligned} \tag{0.4}$$

modélisant l'écoulement d'un fluide compressible, de densité $\rho > 0$, de vitesse $\vec{u} \in \mathbb{R}^d$ (d'où ici $N = d+1$), et de pression p, reliée à ρ par une loi d'état, l'hyperbolicité équivaut à

$$\frac{dp}{d\rho} > 0 .$$

Cette hypothèse est par exemple satisfaite, pour tout $\rho > 0$, par les gaz parfaits isothermes ou isentropiques. Les chapitres 3 et 4 de ce mémoire concernent les équations d'Euler lorsque l'hyperbolicité a lieu dans un ensemble ayant deux composantes connexes, ou *phases*, et où des états appartenant à chacune des phases coexistent.

Revenons maintenant au cas général. Si le système (0.1) satisfait une hypothèse supplémentaire, dite de symétrisabilité, ce qui est le cas pour la plupart des systèmes "physiques" (par exemple les équations d'Euler), alors pour une donnée initiale suffisamment régulière, le problème de Cauchy associé admet une solution régulière locale en temps. C'est un théorème difficile, dû à différents auteurs (Gøarding-Leray, Kato...). Cependant, on montre, par exemple dans le cas scalaire $N = 1$ à l'aide de la méthode des caractéristiques, que ces solutions régulières "explosent" généralement en temps fini. On doit donc considérer des solutions faibles de (0.1), c'est-à-dire des solutions au sens des distributions, admettant en particulier des discontinuités. Les solutions régulières par morceaux sont les solutions faibles les plus faciles à décrire. Ce sont des solutions régulières en dehors d'un ensemble au plus dénombrable d'hypersurfaces de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$, au travers desquelles elles vérifient les "conditions de saut" bien connues de Rankine-Hugoniot:

$$n_t\,[\,u\,] + \sum_{\alpha=1}^{d} n_\alpha\,[\,f^\alpha(u)\,] = 0 , \tag{0.5}$$

où $[\,u\,]$ (resp. $[\,f^\alpha(u)\,]$) désigne la différence entre les états (resp. les flux) de part et d'autre de l'hypersurface admettant pour vecteur normal $n = (n_1 , \cdots , n_d , n_t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. Comme il n'y a pas unicité des solutions faibles, on introduit aussi la notion de *solution entropique*. Celle-ci nécessite l'existence d'*entropies* convexes.

Définition 3 *Une entropie du système (0.1) est une application régulière E de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe des flux d'entropie F^α, applications régulières de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$, satisfaisant:*

$$dF^\alpha = dE \cdot df^\alpha , \ \alpha = 1, \cdots , d . \tag{0.6}$$

Ainsi, toute solution régulière de (0.1) vérifie la loi de conservation supplémentaire:

$$\partial_t E(u) + \sum_{\alpha=1}^{d} \partial_{x_\alpha} F^\alpha(u) = 0 .$$

Pour $N > 1 + 1/d$, le système (0.6) est en général sur-déterminé. Il existe cependant souvent au moins une entropie, reliée à la physique. Par exemple, pour les équations d'Euler, l'"énergie totale":

$$E = \frac{1}{2}\rho\,||\vec{u}||^2 + \rho\,\varepsilon ,$$

où ε est une primitive de p/ρ^2 (c'est-à-dire l'énergie interne spécifique dans le cas isentropique, et l'énergie libre spécifique dans le cas isotherme), est une entropie. C'est de plus une fonction strictement convexe des variables *conservatives* $(\rho , \vec{m} := \rho\,\vec{u})$ dans le domaine d'hyperbolicité $\{\rho > 0 ; p'(\rho) >, 0\}$. Par ailleurs, $\rho\,S$, où S est l'entropie physique, est aussi une entropie mathématique (évidemment guère utile dans le modèle isentropique). C'est une fonction strictement concave de ρ pour un gaz parfait isotherme.

Pour un système "physique" général, dont on suppose qu'il admet des entropies convexes, on a alors la

Définition 4 *Une solution entropique de (0.1) est une solution faible vérifiant, pour toute entropie convexe E, l'inégalité*

$$\partial_t E(u) + \sum_{\alpha=1}^{d} \partial_{x_\alpha} F^\alpha(u) \leq 0 ,$$

au sens des distributions.

Une solution régulière par morceaux est entropique si et seulement si ses discontinuités vérifient une condition d'*admissibilité* associée à chaque entropie convexe, s'écrivant sous forme d'une inégalité analogue aux conditions de Rankine-Hugoniot.

Les résultats de portée générale concernant les solutions entropiques des systèmes hyperboliques de lois de conservation sont peu nombreux. Parmi les plus reconnus, on peut citer:

- Pour les lois de conservation scalaires ($N = 1$): le théorème de Kružkhov (existence et unicité de solutions entropiques globales pour des données initiales bornées).
- Pour les systèmes ($N \geq 2$) en dimension $d = 1$: le théorème de Glimm (existence de solutions entropiques globales pour des données initiales petites en variation totale).

Le cas des systèmes multidimensionnels est encore largement ouvert. Cette étendue de problèmes ouverts incite naturellement à s'intéresser à des systèmes particuliers (ici de type B. Temple –chapitre 1–, ou équations d'Euler –chapitres 3 et 4–) ou/et à des solutions particulières (ondes de choc –chapitre 2–, transitions de phase –chapitres 3 et 4–).

Ce mémoire est divisé en 4 chapitres assez indépendants, ayant pour dénominateur commun l'étude de solutions régulières par morceaux.

Le premier chapitre concerne les systèmes de type B. Temple [30], en dimension $d = 1$. Les exemples classiques de tels systèmes sont ceux modélisant la chromatographie ou l'électrophorèse. Ces systèmes sont d'une nature assez proche des lois de conservation scalaires. Pour une loi de conservation scalaire

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 , \tag{0.7}$$

où $u(x,t) \in \mathbb{R}$, le théorème de Kružkhov assure l'existence globale de solutions entropiques et de plus, lorsque le flux f est *vraiment non linéaire*, c'est-à-dire lorsque f'' ne s'annule pas, on a une formule d'intégration explicite, dûe à Lax [15]. Quant aux systèmes de type B. Temple, on a aussi des théorèmes d'existence globale ([18], [25], [11]), ainsi qu'un résultat d'intégrabilité dû à Serre [26]. Cependant, ce dernier laisse une indétermination quant à l'admissibilité des solutions avec discontinuité(s). Le travail exposé ici lève cette indétermination et inscrit l'intégrabilité dans une formule, analogue à celle de Lax, associée à chaque *champ caractéristique vraiment non-linéaire*. La démonstration de cette formule, fondée sur des arguments de monotonie, vaut pour un large éventail de solutions régulières par morceaux.

Le second chapitre concerne l'approximation numérique des *ondes de choc* d'un système strictement hyperbolique, en dimension $d = 1$. Une onde de choc est une onde progressive, solution entropique particulière, constituée de deux états constants reliés par une discontinuité admissible. (La terminologie d'onde de choc est en fait réservée aux discontinuités associées aux champs caractéristiques vraiment non linéaires.) L'approximation numérique par différences finies d'un système du type (0.3) est le plus souvent fondée sur la formule de Taylor, a priori illégitime au voisinage des chocs. Une préoccupation importante est donc de savoir comment les chocs sont approchés par les schémas aux différences finies. Ceux-ci s'écrivent de façon générale:

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(g(v_{j-k+1}^n, \cdots, v_{j+k'}^n) - g(v_{j-k}^n, \cdots, v_{j+k'-1}^n) \right), \tag{0.8}$$

où le *flux numérique* g est par hypothèse *consistant* avec f, c'est-à-dire:

$$g(u, \cdots, u) = f(u), \forall u \in \mathcal{U}.$$

On s'attend à ce qu'une onde de choc de vitesse σ admette des *profils* discrets, c'est-à-dire des ondes progressives de vitesse σ, solutions de (0.8), reliant les états de part et d'autre du choc. Cependant, la définition même de la notion de profil dépend de la nature du nombre sans dimension:

$$\eta := \sigma \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Si η est rationnel, le problème se formule à l'aide d'un système dynamique discret, d'une taille proportionnelle à q, le dénominateur de η. Majda et Ralston [23] ont montré l'existence de profils discrets dans ce cas, pour des chocs de faible amplitude (dépendant de q). On reproduit au début du chapitre 2 une démonstration, simplifiée grâce à une fonctionnelle invariante, du théorème de Majda-Ralston, que je destinais à un article dans le *Journal de Maths des Élèves de l'ENS Lyon*.
Si η est irrationnel, on doit considérer une équation fonctionnelle avec retard et avance:

$$v(y-\eta) = v(y) - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(g(v(y-k+1), \cdots, v(y+k')) - g(v(y-k), \cdots, v(y+k'-1)) \right),$$

$$\forall\, y \in \overline{\mathbb{Z} + \eta\mathbb{Z}} = \mathbb{R}.$$

C'est un problème ouvert en général de savoir si une telle équation admet des solutions reliant un état u_g en $-\infty$ à un état u_d en $+\infty$. Il a été résolu récemment par Liu et Yu [19], lorsque η satisfait une hypothèse de nature diophantienne.
Un cas d'étude intermédiaire correspond à la limite formelle $\Delta t/\Delta x \to 0$. On recherche alors des profils *semi-discrets*, solutions de:

$$\sigma\, v'(y) = g(v(y-k+1), \cdots, v(y+k')) - g(v(y-k), \cdots, v(y+k'-1)), \; y \in \mathbb{R}. \tag{0.9}$$

Lorsque le flux exact, f, a toutes ses valeurs propres de même signe, on peut considérer un simple schéma décentré, pour lequel $(k, k') = (1, 0)$ ou $(0, 1)$ et $g = f$. Dans ce cas, l'équation différentielle fonctionnelle (0.9) est avec retard seulement ou avance seulement, et l'on peut appliquer la théorie de Hale [10]. C'est le travail exposé au chapitre 2. En fait, pour le schéma de Godunov, généralisant en un certain sens les schémas décentrés, on doit pouvoir atteindre le résultat, bien qu'on ne dispose pas de "théorie toute faite" pour les équations différentielles fonctionnelles avec retard *et* avance. C'est l'objet d'un travail en cours, en collaboration avec G. Iooss.

Comme annoncé plus haut, les chapitres 3 et 4 concernent les équations d'Euler lorsque l'hyperbolicité n'est satisfaite qu'en dehors d'un intervalle borné. Ceci se produit notamment pour des isothermes de van der Waals, dans lesquelles:

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}, \; v = \frac{1}{\rho}, \tag{0.10}$$

où R est la constante des gaz parfaits, $a > 0$ et $b > 0$ sont des données du fluide, lorsque la température T s'abaisse en dessous de la température critique:

$$T_c = \frac{8a}{27bR}.$$

En dehors de la zone dite spinodale, $]v_\star, v^\star[$, où p est fonction croissante de v, le fluide se trouve soit en phase liquide ($b < v < v_\star$), soit en phase vapeur ($v^\star < v$). Dans l'écoulement d'un tel fluide, on s'attend à la propagation de *transitions de phase*, c'est-à-dire des ondes progressives "ressemblant" à des ondes de choc, reliant un état dans la phase liquide à un état dans la phase vapeur. Plusieurs problèmes se posent. Tout d'abord, pour des raisons aussi bien physiques que mathématiques, les conditions de Rankine-Hugoniot ne suffisent pas à déterminer une transition de phase. Il faut ajouter un critère d'admissibilité, plutôt plus contraignant que l'admissibilité au sens de l'entropie. Le critère que nous adoptons a été proposé indépendamment par plusieurs auteurs [31], [29]. Il impose aux transitions de phase d'admettre des *profils visco-capillaires*, c'est-à-dire des ondes progressives solutions des équations d'Euler auxquelles on ajoute des termes tenant compte de la viscosité et la capillarité. L'objet du chapitre 3 est d'étudier les transitions de phase admissibles selon ce critère. On se ramène pour cela à un système dynamique classique, dépendant d'un paramètre sans dimension ν, lié aux coefficients de viscosité et de capillarité, et du flux de masse j à travers l'interface. On montre notamment que les transitions de phase admissibles sont paramétrées par le couple (ν, j). Mais à un état dit *métastable*, c'est-à-dire situé entre les points de Maxwell, définis par la règle des aires égales, peuvent correspondent deux transitions de phase différentes. Ce résultat était déjà connu [31], mais il est justifié ici par un calcul de bifurcation. Un autre calcul de bifurcation, en dehors du palier de Maxwell, est présenté en vue de l'étude de stabilité du chapitre 4. Ce dernier chapitre concerne un autre problème important, à savoir la *stabilité multidimensionnelle* des transitions admissibles. Ceci est évidemment une question intéressante du point de vue physique, car elle est liée à l'observabilité de ces transitions de phase. Elle l'est aussi du point de vue de mathématique. En effet, la stabilité linéarisée des transitions de phase d'interface plane, dont on montre qu'elle est *uniforme* (au sens de la condition de Lopatinski) lorsque le fluide est visqueux, doit permettre de démontrer, en suivant la démarche de Majda concernant les chocs [21], [20], l'existence locale en temps de transitions de phase non planes.

Chapitre 1

Systèmes de type B. Temple: formule à la Lax associée à un champ caractéristique vraiment non linéaire

Ce chapitre correspond à l'article [2].

Introduction

Soit un système de N lois de conservation en dimension $d = 1$:

$$\partial_t u \,+\, \partial_x f(u) \,=\, 0\,, \tag{1.1}$$

strictement hyperbolique dans un domaine *convexe* $\mathcal{U}$. Les valeurs propres de $df(u)$, pour tout $u \in \mathcal{U}$, seront notées

$$\lambda_1(u) \,<\, \cdots \,<\, \lambda_N(u)\,.$$

On suppose en outre que (1.1) est de type *B. Temple* [30].

Définition 5 *Le système (1.1) est de type B. Temple s'il existe N* invariants de Riemann forts, *c'est-à-dire des fonctions $w_1, \cdots, w_N$, définies et régulières sur $\mathcal{U}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que, pour tout $u \in \mathcal{U}$:*

$$dw_i(u)\, df(u) \,=\, \lambda_i(u)\, dw_i(u)\,,$$

dont les ensembles de niveau *soient (inclus dans) des* hyperplans *de $\mathbb{R}^N$.*

L'exemple le plus classique de système de ce type est celui modélisant la chromatographie:

Exemple 1 *Soient $a_1, \cdots, a_N$ des réels tels que:*

$$0 \,<\, a_1 \,<\, \cdots \,<\, a_N\,.$$

Considérons le système de lois de conservation:

$$\partial_t u_i \,+\, \partial_x \left(\frac{a_i u_i}{u_1 \,+\, \cdots \,+\, u_N} \right) \,=\, 0\,,\;\; i \,=\, 1, \cdots, N\,,$$

dans le domaine $\mathcal{U} \,=\, (\mathbb{R}^{+*})^N$. C'est un système de type B. Temple, dont les invariants de Riemann sont, d'une part:

$$w_1 \,:=\, \sum_{i=1}^{N} \frac{u_i}{a_i}\,,$$

et d'autre part les w_k, $k = 2, \cdots, N$, à valeurs dans $]a_{k-1}, a_k[$, définis par:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i}{a_i - w_k} = 0 \,.$$

Une loi de conservation scalaire ($N = 1$) peut bien sûr être vue comme étant de type B. Temple. En fait, les systèmes de B. Temple partagent de nombreuses propriétés avec les lois de conservation scalaires. Notamment, leurs courbes d'ondes sont des droites. De plus, le problème de Cauchy est bien posé dans $VB(\mathbb{R})$, au sens où l'on a existence *et*, dans une certaine mesure, unicité de solutions entropiques globales, à variation totale uniformément bornée dès que la condition initiale u_0 est à variation bornée (voir [18], [25], [11]). Le travail que nous allons exposer ici étend aux systèmes de B. Temple une autre propriété des lois de de conservation scalaires, à savoir leur intégrabilité via la *formule de Lax*. Cette dernière peut s'énoncer ainsi:

Théorème 1 (Lax) *Soit u la solution entropique du problème de Cauchy:*

$$\begin{aligned} \partial_t u \, + \, \partial_x f(u) \, &= \, 0 \,, \\ u(x,0) \, &= \, u_0(x) \,, \end{aligned}$$

où $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un flux strictement convexe *et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ est à valeurs dans $\mathcal{U}$. Alors $u = \partial_x v$, où v est donnée explicitement par:*

$$\inf_{y \in \mathbb{R}} \sup_{u \in \mathcal{U}} \left(v_0(y) - v(x,t) + (x-y)\, u - t\, f(u) \right) = 0 \,, \tag{1.2}$$

avec v_0 une primitive de u_0.

La stricte convexité demandée dans le théorème de Lax est, avec le vocabulaire des systèmes, une hypothèse de véritable non linéarité. C'est pourquoi nous allons proposer une formule analogue à (1.2), associée à chaque champ caractéristique vraiment non-linéaire de (1.1).

Définition 6 *Soit r un champ de vecteurs propres associé à une valeur propre λ de (1.1). On dit que le champ caractéristique (λ, r) est vraiment non-linéaire si, pour tout $u \in \mathcal{U}$:*

$$d\lambda(u) \cdot r(u) \neq 0 \,.$$

Dans le cas du système de la chromatographie par exemple, les champs (λ_i, r_i), $i = 2, \cdots, N$, sont tous vraiment non-linéaires. Le premier champ lui ne l'est pas: il est même linéairement dégénéré, puisque $\lambda_1 \equiv 0$.

Soit donc (λ, r) un champ caractéristique vraiment non-linéaire de (1.1), et w un invariant de Riemann fort associé. Pour fixer les idées, nous supposons r choisi de sorte que:

$$d\lambda(u) \cdot r(u) > 0 \,, \, \forall u \in \mathcal{U} \,,$$

et w choisi de sorte que:

$$dw(u) \cdot r(u) > 0 \,, \, \forall u \in \mathcal{U} \,.$$

Le premier choix est possible d'après la véritable non-linéarité de (λ, r), et le second l'est grâce à la stricte hyperbolicité de (1.1) (qui implique $dw(u) \cdot r(u) \neq 0$). Soit ensuite a une valeur prise par w. Alors l'ensemble de niveau

$$E_a = \{ \, u \in \mathcal{U} \, ; \, w(u) = a \, \}$$

est, d'après la définition 5, inclus dans un hyperplan affine. Soit donc

$$e_a \cdot u = m_a$$

une équation de cet hyperplan, où la forme linéaire e_a est choisie telle que

$$e_a \cdot r(u) > 0 , \forall u \in E_a .$$

Ce dernier choix est possible car, par définition de E_a, e_a est colinéaire à $dw(u)$, quel que soit $u \in E_a$. Enfin, on remarque aisément qu'il existe une constante $q_a \in \mathbb{R}$ telle que:

$$e_a \cdot f(u) = q_a , \forall u \in \mathcal{U} .$$

(Il suffit d'écrire

$$e_a \cdot (f(u) - f(v)) = \int_0^1 e_a \cdot df(v + t(u - v)) (u - v) \, dt$$

$$= \int_0^1 \lambda(v + t(u - v)) \, dt \;\; e_a \cdot (u - v) = 0 , \forall (u, v) \in E_a^2 .)$$

Avec ces notations, la formule que l'on propose est la suivante:

$$\inf_{y \in \mathbb{R}} \sup_{a \in w(\mathcal{U})} (e_a \cdot v_0(y) - e_a \cdot v(x,t) + (x - y) \, m_a - t \, q_a) = 0 . \tag{1.3}$$

Ceci précise un résultat de Serre [26], qui avait notamment remarqué que la fonction

$$\mathcal{L}(y, a; x, t) := e_a \cdot v_0(y) - e_a \cdot v(x,t) + (x - y) \, m_a - t \, q_a$$

s'annule lorsque y est le pied de la λ-caractéristique passant par (x, t) et $a = w(u(x,t)) = w(u_0(y))$. Dans [26], Serre avait aussi montré que le graphe de la solution $\{ (x, t, v(x,t)) \in \mathbb{R}^{N+2} ; \, (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \}$ était contenu dans une enveloppe d'hyperplans. Mais, en cas de chocs, cette enveloppe contenait des "boucles" correspondant à une partie non admissible de la solution. La formule (1.3) lève cette indétermination. Dans le cas scalaire, les notations introduites se simplifient en:

$$e_a = 1 , \, m_a = a , \, q_a = f(a) ,$$

et l'on retrouve bien (1.2). Dans le cas de la chromatographie, on a autant de formules que de champs vraiment non-linéaires, c'est-à-dire $N - 1$. Étant donné $a \in]a_{k-1}, a_k[$, $k \in \{2, \cdots , N\}$, on montre facilement que:

$$e_a = (\frac{1}{a - a_1} , \cdots , \frac{1}{a - a_N}) , \, m_a = 0 , \, q_a = -1 ,$$

conviennent. La formule (1.3) associée au k-ième champ caractéristique s'écrit donc:

$$\inf_{y \in \mathbb{R}} \sup_{a \in]a_{k-1}, a_k[} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{v_{0i}(y) - v_i(x,t)}{a - a_i} + t \right) = 0 .$$

1.1 Validité de la formule

Dans la suite, on ne travaille que sur des solutions régulières par morceaux, pour lesquels les calculs que nous faisons sont justifiés.

1.1.1 Une inégalité

Théorème 2 *Soient (λ, r) un champ caractéristique vraiment non-linéaire de (1.1) et w un invariant de Riemann fort associé. Pour tout $a \in w(\mathcal{U})$, soient $e_a \in (\mathbb{R}^N)^*$, $m_a \in \mathbb{R}$ et $q_a \in \mathbb{R}$, tels que*

$$E_a = \{ u \in \mathcal{U} \, ; \, w(u) = a \} = \{ u \in \mathcal{U} \, ; \, e_a \cdot u = m_a \} ,$$

et, pour tout $u \in E_a$:

$$e_a \cdot f(u) = q_a ,$$

$$(e_a \cdot r(u))(dw(u) \cdot r(u)) > 0 .$$

Soient $u_0 \in VB(\mathbb{R})$, v_0 une primitive de u_0, et u la solution entropique du problème de Cauchy pour le système (1.1) et la condition initiale u_0. Si u est régulière par morceaux, alors $u = \partial_x v$ avec, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$:

$$\inf_{y \in \mathbb{R}} \sup_{a \in w(\mathcal{U})} (e_a \cdot v_0(y) - e_a \cdot v(x,t) + (x-y) \, m_a - t \, q_a) \leq 0 .$$

La preuve de ce premier résultat est fondée sur une “inégalité de convexité généralisée” [2]:

Lemme 1 *Sous les hypothèses du théorème 2, on a, pour tout $a \in w(\mathcal{U})$, pour tout $u \in \mathcal{U}$:*

$$e_a \cdot f(u) - q_a - \lambda(u) (e_a \cdot u - m_a) \leq 0 . \tag{1.4}$$

Dans le cas scalaire, on retrouve effectivement l'inégalité de convexité:

$$f(u) - f(a) - f'(u) (u - a) \leq 0 .$$

Dans le cas de la chromatographie, on a

$$\lambda_k = \frac{w_k}{u_1 + \cdots + u_N} .$$

Par suite, l'inégalité (1.4) équivaut à:

$$(a - w_k(u)) \sum_{i=1}^{N} \frac{u_i}{a - a_i} \leq 0 ,$$

ce qui est une conséquence directe de la définition de w_k.

On déduit facilement de (1.4) que, pour tout (y, a), la fonction

$$(x,t) \mapsto \mathcal{L}(y,a;x,t) = e_a \cdot v_0(y) - e_a \cdot v(x,t) + (x-y) \, m_a - t \, q_a$$

est décroissante le long des λ-caractéristiques. Ayant remarqué qu'une λ-caractéristique retourne toujours à l'axe des x (encore une propriété généralisant le cas scalaire, voir [26]), on en déduit:

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ , \, \exists y \in \mathbb{R} \, ; \, \forall a \in w(\mathcal{U}) , \, \mathcal{L}(y,a;x,t) \leq 0 ,$$

ce qui prouve le théorème 2.

1.1.2 L'inégalité opposée

Pour démontrer l'inégalité opposée:

$$\inf_{y\in\mathbb{R}} \sup_{a\in w(\mathcal{U})} \left(e_a \cdot v_0(y) - e_a \cdot v(x,t) + (x-y)\, m_a - t\, q_a \right) \geq 0\,,$$

on aimerait utiliser une généralisation de l'inégalité de convexité opposée du cas scalaire:

$$f(u) - f(a) - f'(a)(u-a) \geq 0\,.$$

On a en effet [2]:

Lemme 2 *Sous les hypothèses du théorème 2, si $u \in \mathcal{U}$ et $b \in \mathcal{U}$ sont sur la* même courbe intégrale *de r, alors:*

$$dw(b) \cdot \left(f(u) - f(b) - \lambda(b)(u-b) \right) \geq 0\,. \tag{1.5}$$

Ce résultat n'est cependant guère exploitable, sauf dans le cas particulier, incluant trivialement le cas scalaire mais pas le système de la chromatographie, où λ est constant sur les ensembles E_a, c'est-à-dire où $\lambda(b)$ (dans (1.5)) ne dépend que de $w(b)$.

Malgré tout, on peut démontrer que (1.3) a lieu pour un ensemble assez large de données initiales, incluant notamment les données de Riemann [2]:

Théorème 3 *Soient (λ, r) un champ caractéristique vraiment non-linéaire de (1.1) et w un invariant de Riemann fort associé. Pour tout $a \in w(\mathcal{U})$, soient $e_a \in (\mathbb{R}^N)^*$, $m_a \in \mathbb{R}$ et $q_a \in \mathbb{R}$, tels que*

$$E_a = \{ u \in \mathcal{U}\,;\, w(u) = a \} = \{ u \in \mathcal{U}\,;\, e_a \cdot u = m_a \}\,,$$

et, pour tout $u \in E_a$:

$$e_a \cdot f(u) = q_a\,,$$

$$(e_a \cdot r(u))(dw(u) \cdot r(u)) > 0\,.$$

Soit $u_0 \in VB(\mathbb{R})$ telle que $w \circ u_0$ soit monotone *sur $\mathbb{R}$ et soit v_0 une primitive de u_0. Soit u la solution entropique du problème de Cauchy pour le système (1.1) et la condition initiale u_0. Si u est régulière par morceaux, alors $u = \partial_x v$ avec, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$:*

$$\inf_{y\in\mathbb{R}} \sup_{a\in w(\mathcal{U})} \left(e_a \cdot v_0(y) - e_a \cdot v(x,t) + (x-y)\, m_a - t\, q_a \right) = 0\,.$$

Remarque 1 *L'inégalité qui pose problème dans le cas général:*

$$\inf_{y\in\mathbb{R}} \sup_{a\in w(\mathcal{U})} \left(e_a \cdot v_0(y) - e_a \cdot v(x,t) + (x-y)\, m_a - t\, q_a \right) \geq 0\,,$$

est démontrée dans [12] pour les solutions régulières des systèmes 2×2.

Chapitre 2

Profils discrets et semi-discrets des ondes de choc

Ce chapitre traite notamment de l'article [3]. Il reprend aussi le contenu d'un article que j'avais rédigé à l'intention du *Journal de Maths des Élèves de l'ENS Lyon*, et que je n'ai finalement pas soumis.

2.1 Quelques schémas numériques

Considérons un système de N lois de conservation en dimension $d = 1$:

$$\partial_t u \,+\, \partial_x f(u) \,=\, 0\,. \tag{2.1}$$

On le supposera, dans tout ce chapitre, strictement hyperbolique dans un domaine $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N$, c'est-à-dire tel que, pour tout $u \in \mathcal{U}$, la matrice jacobienne $A(u) := df(u)$ admet exactement N valeurs propres réelles distinctes

$$\lambda_1(u) \,<\, \cdots \,<\, \lambda_N(u)\,.$$

On s'intéresse à l'approximation numérique du système (2.1), par un schéma aux différences finies s'écrivant de la façon suivante. Étant donnés un pas d'espace $\Delta x > 0$ et un pas de temps $\Delta t > 0$, une suite bornée $(v_j^0)_{j\in\mathbb{Z}}$, on définit, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_j^{n+1} \,=\, v_j^n \,-\, \frac{\Delta t}{\Delta x}\,(\,g(\,v_{j-k+1}^n, \cdots, v_{j+k'}^n\,) \,-\, g(\,v_{j-k}^n, \cdots, v_{j+k'-1}^n\,)\,)\,, \tag{2.2}$$

où k et k' sont des entiers naturels, et g est consistant avec f:

$$g(u, \cdots, u) \,=\, f(u)\,, \forall u \in \mathcal{U}\,. \tag{2.3}$$

On demande de plus au rapport

$$\lambda \,:=\, \frac{\Delta t}{\Delta x}\,,$$

de satisfaire la condition CFL:

$$-\,k \,<\, -\,\lambda\,\lambda_i(u) \,<\, k'\,,\;\; i = 1, \cdots, N\,, \tag{2.4}$$

pour tout $u \in \mathcal{K}$, compact de $\mathcal{U}$ contenant au moins les valeurs de la condition initiale $(v_j^0)_{j\in\mathbb{Z}}$.

Dans le cas le plus simple d'un schéma décentré, on a $(k, k') \,=\, (0, 1)$ ou $(k, k') \,=\, (1, 0)$, c'est-à-dire que g dépend seulement d'une variable: il est en fait *égal* à f. Notons cependant que la condition CFL (2.4) restreint l'application d'un tel schéma à un flux f dont les valeurs propres sont toutes de même signe.

Les autres schémas les plus classiques sont à 3 points: $k = k' = 1$ et g dépend alors de deux variables. Par exemple, le flux du schéma de Lax-Friedrichs s'écrit:

$$g^{LF}(u,v) \,=\, \frac{f(u)\,+\,f(v)}{2} \,+\, \frac{u\,-\,v}{2\lambda}\,,$$

tandis que celui du schéma de Lax-Wendroff est:

$$g^{LW}(u,v) \,=\, \frac{f(u)\,+\,f(v)}{2} \,+\, \frac{\lambda}{2}\,df\left(\frac{u+v}{2}\right)\,(\,f(u)\,-\,f(v)\,)\,.$$

Le schéma de Godunov nécessite quant à lui l'existence d'un *solveur de Riemann* pour le système (2.1), c'est-à-dire d'une application:

$$R : (u_g, u_d) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \;\mapsto\; R(\cdot\,; u_g, u_d) \in L^\infty(\mathbb{R}) \;\text{ t.q. }\; u(x,t) \,:=\, R(x/t; u_g, u_d)$$

soit la solution entropique du *problème de Riemann*:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t u \,+\, \partial_x f(u) \,=\, 0\,, \\[2ex] u(x,0) \,=\, u_g\,,\ \text{si } x < 0\,, \\ u(x,0) \,=\, u_d\,,\ \text{si } x > 0\,. \end{array}\right.$$

Si l'on dispose d'un tel solveur, alors on définit le flux numérique du schéma de Godunov par:

$$g^G(u,v) \,=\, f(R(0; u,v))\,.$$

Dans le cas particulier où les valeurs propres de df sont toutes partout de même signe, le schéma de Godunov se réduit à un schéma décentré (moyennant quelques hypothèses "raisonnables" sur f, assurant l'unicité de la solution du problème de Riemann [13]). Par exemple, si les valeurs propres de df sont toujours positives, on a

$$g^G(u,v) \,=\, f(u)\,.$$

D'autres schémas, plus sophistiqués, sont à 5 points ($k = k' = 2$) ou plus [17]. On verra dans l'étude des profils de choc discrets qu'ils ont aussi un intérêt abstrait.

2.2 Profils discrets

Introduction

Supposons que l'on ait un *choc* de vitesse σ entre deux états $u_g \in \mathcal{U}$ et $u_d \in \mathcal{U}$ pour le système (2.1).

Définition 7 (Lax) *Soit $i \in \{1, \cdots, N\}$. On dira que $(u_g, u_d, \sigma) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}$ est un i-choc si la condition de Rankine-Hugoniot est satisfaite:*

$$\sigma\,(u_d - u_g) \,=\, f(u_d) - f(u_g)\,, \tag{2.5}$$

ainsi que les inégalités de choc de Lax:

$$\begin{array}{c} \lambda_i(u_d) \,<\, \sigma \,<\, \lambda_i(u_g)\,, \\ \lambda_{i-1}(u_g) \,<\, \sigma \,<\, \lambda_{i+1}(u_d)\,. \end{array} \tag{2.6}$$

Remarque 2 *Si le i-ème champ caractéristique est* vraiment non-linéaire *[15], on montre que les i-chocs de faible amplitude sont des discontinuités admissibles au sens de la condition d'entropie. Si le i-ème champ caractéristique est au contraire* linéairement dégénéré *[15], il n'y a pas de i-choc du tout: les discontinuités associées à un tel champ sont des discontinuités de contact, de vitesse $\sigma = \lambda_i(u_d) = \lambda_i(u_g)$. Le cas des discontinuités de contact ne sera pas envisagé ici. On sera de plus amené à faire une hypothèse de véritable non linéarité.*

Le problème qui nous occupe est de savoir si le schéma (2.2) admet des solutions qui soient des ondes progressives de vitesse discrète $\eta := \lambda\,\sigma$, reliant u_g à u_d. C'est ce type de solutions que nous appelons des *profils de choc discrets*:

Définition 8 *Un profil de choc discret associé à un i-choc (u_g, u_d, σ) est une solution particulière $(v_j^n)_{(j,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}$ de (2.2), de la forme:*

$$v_j^n = u(j\,-\,\eta\, n),\ j\in\mathbb{Z}\,,\, n\in\mathbb{N}\,,$$

où l'application $u : \overline{\mathbb{Z}+\eta\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathcal{U}$ est continue, et:

$$\lim_{j\longrightarrow-\infty} v_j^n \;=\; u_g \;\; and \;\; \lim_{j\longrightarrow+\infty} v_j^n \;=\; u_d\;,\; n\in\mathbb{N}\,.$$

Lorsque η est rationnel, disons $\eta = p/q$, avec p et q premiers entre eux, $q\geq 1$, l'existence de profils discrets est clairement équivalente à l'existence de *suites* $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}/q}$ avec $u_\alpha\in\mathcal{U}$ telles que, pour tout $\alpha\in\mathbb{Z}/q$:

$$u_{\alpha-p/q} \;=\; u_\alpha \;-\; \lambda\,(\,g(u_{\alpha-k+1},\cdots,u_{\alpha+k'}) \;-\; g(u_{\alpha-k},u_{\alpha+k'-1})\,)\,, \tag{2.7}$$

et

$$\lim_{\alpha\longrightarrow\pm\infty} u_\alpha \;=\; u_{d,g}\,.$$

L'article fondateur à propos de l'existence de tels profils est celui de Jennings [14], qui concerne le cas scalaire $N = 1$. Jennings a montré dans ce cas l'existence de profils discrets d'amplitude arbitraire. Le cas des systèmes a été étudié par Majda et Ralston [23]. Leur résultat vaut pour des chocs d'amplitude suffisamment faible, dépendant de q. Nous l'expliquons en détail dans la suite, en simplifiant quelque peu leur démonstration grâce à une fonctionnelle invariante. Ceci pourra éclairer la démarche suivie plus loin pour les profils semi-discrets.

Mais revenons un instant au cas, "générique", où η est irrationnel. Alors l'existence de profils discrets équivaut à l'existence de *fonctions* continues $u:\mathbb{R}\longrightarrow\mathcal{U}$ telles que, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u(x-\eta) \;=\; u(x) \;-\; \lambda\,(\;\; & g(u(x-k+1),\cdots,u(x+k'))\,- \\ & g(u(x-k),\cdots,u(x+k'-1))\,)\,, \end{aligned} \tag{2.8}$$

et

$$\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} u(x) \;=\; u_{d,g}\,.$$

L'existence de tels profils a été montrée récemment par Liu et Yu [19], dans le cas "diamétralement opposé" au cas rationnel, c'est-à-dire lorsque η satisfait la propriété Diophantienne:

$$\exists C>0\,,\ \exists\theta>0\,,\ \ \forall p\in\mathbb{Z}\,,\,\forall q\in\mathbb{N}^*\,;\ \left|\eta\,-\,\frac{p}{q}\right| \,>\, \frac{C}{q^\theta}\,.$$

Leur démonstration, très technique, est écrite pour le schéma de Lax-Friedrichs modifié:

$$v_j^{n+1} = \frac{v_{j+1}^n + v_j^n + v_{j-1}^n}{3} - \frac{\lambda}{2}\left(f(v_{j+1}^n) - f(v_{j-1}^n) \right). \tag{2.9}$$

Elle est fondée sur la recherche de solutions stationnaires, c'est-à-dire indépendantes de n, du problème:

$$w^{n+1}(x) = \frac{w^n(x+\eta+1) + w^n(x+\eta) + w^n(x+\eta-1)}{3}$$

$$-\frac{\lambda}{2}\left(f(w^n(x+\eta+1)) - f(w^n(x+\eta-1)) \right), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} w^n(x) = u_{d,g}.$$

Dans le cas où η est irrationnel mais "bien approché" par des rationnels, l'existence de profils discrets est un problème ouvert. On se heurte à des difficultés théoriques importantes et notamment à des problèmes de *petits diviseurs*. On pourrait en effet formuler le problème en terme de système dynamique en dimension infinie, sur des fonctions à support dans $[-k, k'-1]$ par exemple, et chercher à appliquer "comme d'habitude" un argument de type variété centrale. Mais, en linéarisant (2.8) autour d'un état constant u_0, on obtient:

$$u(x-\eta) = \sum_{l=-k}^{k'} \partial_l G(u_0, \cdots, u_0)\, u(x+l),$$

où

$$G(v_{-k}, \cdots, v_{k'}) := v_0 - \lambda\left(g(v_{-k+1}, \cdots, v_{k'}) - g(v_{-k}, \cdots, v_{k'-1}) \right). \tag{2.10}$$

Le spectre du système dynamique linéarisé contiendrait ainsi les racines de l'équation caractéristique:

$$\text{dét}\left(e^{-\eta z} I - \sum_{l=-k}^{k'} \partial_l G(u_0, \cdots, u_0)\, e^{lz} \right) = 0. \tag{2.11}$$

Or, d'après la définition (2.10), on a:

$$\sum_{l=-k}^{k'} \partial_l G(u_0, \cdots, u_0) = I. \tag{2.12}$$

Par suite, lorsque η est proche d'un rationnel, p/q, il y a des racines de (2.11) proches de tous les points de $2i\pi q\mathbb{Z}$. Il y a donc une infinité de racines de (2.11) au voisinage de l'axe imaginaire pur. Dans ce cas, une démonstration de l'existence de profils discrets, si elle a lieu (voir [27] pour une discussion à ce sujet), demanderait un traitement adapté aux problèmes de petits diviseurs.

2.2.1 Le cadre du théorème de Majda-Ralston

Dans toute la suite de cette partie sur les profils discrets, on suppose $\eta \in \mathbb{Q}$. On se propose de donner une démonstration du théorème de Majda-Ralston sous une forme simplifiée. Ceci devait faire l'objet d'un article au Journal de Maths des Élèves de l'ENS Lyon. Mais il m'a finalement semblé trop technique pour intéresser les élèves. Tous les résultats décrits sont dûs à Majda et Ralston, sauf les lemmes 6 et 7 qui apportent la simplification annoncée.

Commençons par introduire les hypothèses ainsi que le système dynamique à étudier.

Une remarque classique consiste à dire qu'il "suffit" en fait d'étudier le cas $\eta \in \mathbb{Z}$. En effet, en itérant (2.7) on constate facilement:

Proposition 1 *Soit $\eta = p/q$, avec p et q premiers entre eux, $q > 0$. L'existence de profils discrets équivaut à l'existence de* suites $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *avec $u_j \in \mathcal{U}$ telles que, pour tout $j \in \mathbb{Z}$:*

$$u_{j-p} \;=\; G^{(q)}(\, v_{j-qk}, \cdots, v_{j+qk'}\,)\,, \tag{2.13}$$

et $\lim_{j\longrightarrow\pm\infty} u_j \;=\; u_{d,g}$, où $G^{(q)}$ est le schéma à $q(k+k')+1$ points, obtenu après q itérations de G:

$$\begin{aligned} &G^{(1)} \;=\; G\,,\\ &\vdots\\ &G^{(q)}(\, v_{-qk}, \cdots, v_{qk'}\,) \;=\\ &G(\, G^{(q-1)}(\, v_{-qk}, \cdots, v_{(q-1)k'-k}\,)\,,\; \cdots\;,\; G^{(q-1)}(\, v_{-(q-1)k+k'}, \cdots, v_{qk'}\,)\,)\,. \end{aligned}$$

Ainsi, quitte à considérer un schéma à plus gros support, on peut supposer $q = 1$. C'est ce que l'on fait désormais. L'équation à satisfaire par les profils s'écrit plus simplement:

$$u_{j-p} \;=\; G(\, u_{j-k}, \cdots, u_{j+k'}\,)\,. \tag{2.14}$$

On remarque que la condition de Rankine-Hugoniot (2.5) est une condition nécessaire à l'existence de profils discrets de vitesse $p \;=\; \lambda\,\sigma$. En effet, toute solution de (2.14) doit vérifier

$$\sum_{j=-J}^{J} (u_j - u_{j-p}) \;=\; \sum_{j=-J}^{J} \lambda(\; g\,(u_{j-k+1}, \cdots, u_{j+k'}) \;-\; g\,(u_{j-k}, \cdots, u_{j+k'-1})\;)\,,\; J \in \mathbb{N}\,.$$

En passant à la limite lorsque $J \to +\infty$ il reste:

$$p\,(u_d - u_g) \;=\; \lambda\,(\, f(u_d) - f(u_g)\,)\,,$$

c'est-à-dire (2.5) en divisant par λ. On remarque aussi que la condition CFL (2.4) et la condition de choc de Lax (2.6) demandent:

$$-\,k \;<\; -\,p \;<\; k'\,. \tag{2.15}$$

Par suite, si G est inversible par rapport à sa dernière variable, on pourra écrire:

$$v_{-p} \;=\; G(\, v_{-k}, \cdots, v_{k'}\,) \iff v_{k'} \;=\; H(\, v_{-k}, \cdots, v_{k'-1}\,)\,,$$

et si elle l'est par rapport à sa première variable, on aura:

$$v_{-p} \;=\; G(\, v_{-k}, \cdots, v_{k'}\,) \iff v_{-k} \;=\; \widetilde{H}(\, v_{-k+1}, \cdots, v_{k'}\,)\,.$$

Cet argument est à la base de la méthode de Majda-Ralston. C'est pourquoi on fera l'hypothèse:

$$\partial_{-k}G(u_0, \cdots, u_0) \text{ et } \partial_{k'}G(u_0, \cdots, u_0) \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{R})\,, \tag{2.16}$$

où u_0 est choisi en sorte que

$$\lambda_i(u_0) \;=\; \sigma \;=\; p/\lambda\,. \tag{2.17}$$

L'existence de u_0 satisfaisant (2.17) découle du théorème des valeurs intermédiaires lorsque le i-choc (u_g, u_d, σ) est de faible amplitude. C'est au voisinage de ce point que nous ferons tous les calculs de bifurcation: le résultat de Majda-Ralston vaut en effet pour des chocs de faible amplitude. L'hypothèse (2.16) est quant à elle "souvent" une conséquence de la condition CFL. Elle est notamment satisfaite par les schémas décentrés, le schéma de Lax-Friedrichs et ses versions modifiées, et le schéma de Lax-Wendroff. Elle ne l'est pas pour le schéma de Godunov. Ce dernier est donc exclu de la présente étude. Moyennant (2.16), il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de u_0 dans $\mathbb{R}^N$ tel que, pour tout $(\,v_{-k}, \cdots, v_{k'}\,) \in \mathcal{W} \times \cdots \times \mathcal{W}$:

$$v_{-p} \;=\; G(\,v_{-k}, \cdots, v_{k'}\,) \iff v_{k'} \;=\; H(\,v_{-k}, \cdots, v_{k'-1}\,) \iff v_{-k} \;=\; \widetilde{H}(\,v_{-k+1}, \cdots, v_{k'}\,)\,.$$

On peut ainsi définir le difféomorphisme T par:

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathcal{W} \times \cdots \times \mathcal{W} \subset (\mathbb{R}^N)^{k+k'} & \longrightarrow & \mathcal{W} \times \cdots \times \mathcal{W} \\ & \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{k+k'} \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_{k+k'} \\ H(u_1, \cdots, u_{k+k'}) \end{pmatrix}, \end{array}$$

dont la réciproque est donnée par:

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{T}: & \mathcal{W} \times \cdots \times \mathcal{W} & \longrightarrow & \mathcal{W} \times \cdots \times \mathcal{W} \\ & \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{k+k'-1} \\ u_{k+k'} \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \widetilde{H}(u_1, \cdots, u_{k+k'}) \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{k+k'-1} \end{pmatrix}. \end{array}$$

On a alors:

Proposition 2

1. *Les points fixes de T dans $\mathcal{W} \times \cdots \times \mathcal{W}$ sont les éléments de la diagonale:*

$$\{\,U\,;\;\exists u \in \mathcal{W}\,,\; U \;=\; \overline{u} \;:=\; {}^t(u, \cdots, u)\,\}\,.$$

2. *Une suite $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{W}^{\mathbb{Z}}$ vérifie l'équation de profil (2.14) si et seulement pour tout $j \in \mathbb{Z}$,*

$$\begin{pmatrix} u_{j-k} \\ \vdots \\ u_{j+k'-1} \end{pmatrix} \;=\; T^j \begin{pmatrix} u_{-k} \\ \vdots \\ u_{k'-1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'existence de profils discrets reliant $u_g \in \mathcal{W}$ à $u_d \in \mathcal{W}$ équivaut à l'existence de trajectoires hétéroclines du difféomorphisme T, reliant le point fixe $\overline{u_g}$ au point fixe $\overline{u_d}$. Majda et Ralston montrent que de telles trajectoires existent à certaines conditions.

Tout d'abord, ils supposent le i-ième champ caractéristique *vraiment non linéaire* en u_0:

$$d\lambda_i(u_0) \cdot r_i(u_0) \;\neq\; 0\,, \tag{2.18}$$

où r_i est un vecteur propre de df pour la valeur propre λ_i. C'est une hypothèse naturelle (voir la remarque 1), que l'on fait également lorsqu'on s'intéresse aux profils visqueux (voir par exemple [9]). D'autre part, ils requièrent deux propriétés supplémentaires pour G.

La première demande que le schéma soit *dissipatif* dans la direction $r_i(u_0)$. Étant donnée $(\ell_1(u), \cdots, \ell_N(u))$ la base duale de la base des vecteurs propres $(r_1(u), \cdots, r_N(u))$ de $df(u)$, on doit avoir:

$$\ell_i(u_0)\, B(u_0)\, r_i(u_0) \;>0\,, \tag{2.19}$$

où B est la matrice de dissipation du schéma, définie pour $u \in \mathcal{U}$ par:

$$B(u) \;:=\; \sum_{l=-k}^{k'} l^2\, \partial_l\, G(u, \cdots, u) \;-\; \lambda^2\, df(u)^2\,.$$

Pour les schémas décentrés et celui de Lax-Friedrichs, la propriété (2.19) découle de la condition CFL (2.4). (Elle serait aussi satisfaite par le schéma de Godunov à condition que $\lambda_i(u_0) \neq 0$.) En revanche, (2.19) n'est pas satisfaite pour le schéma de Lax-Wendroff, qui est d'ordre 2 par construction et pour lequel $B \equiv 0$.

La seconde propriété demandée à G est une condition de *non-résonance*. Si on note, pour $u \in \mathcal{U}$, $z \in \mathbb{C}$:

$$M(u; z) \;:=\; \sum_{l=-k}^{k'} z^l\, \partial_l\, G(u, \cdots, u)\,,$$

on doit avoir:

$$\forall z \in \mathrm{S}^1 \backslash \{1\}\,,\ (\, I \;-\; z^p\, M(u_0; z)\,) \;\in \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})\,. \tag{2.20}$$

Le cas $z = 1$ est évidemment exclu dans (2.20), puisque $I - M(u; 1) \;=\; 0$ d'après (2.12). La propriété (2.20) permettra d'obtenir une variété centrale de dimension assez "petite". Elle n'est pas satisfaite pour le schéma de Lax-Friedrichs ordinaire, à cause du "décalage" de maillage qu'il implique. Celui-ci est en effet de la forme:

$$v_j^{n+1} \;=\; \mathcal{G}(v_{j-1}^n, v_{j+1}^n)\,,$$

si bien que le calcul de $(v_j^{n+1})_{j\in 2\mathbb{Z}}$, par exemple, n'utilise que les valeurs de $(v_j^n)_{j\in 1+2\mathbb{Z}}$. En revanche, sa version itérée, définie sur la grille double (de pas $2\Delta x$, $2\Delta t$) par:

$$G(u, v, w) \;=\; \mathcal{G}(\mathcal{G}(u, v), \mathcal{G}(v, w))\,,$$

est "non-résonante". Par ailleurs, toute version modifiée du schéma de Lax-Friedrichs du type:

$$v_j^{n+1} \;=\; \frac{\alpha\, v_{j+1}^n \;+\; \beta\, v_j^n \;+\; \alpha\, v_{j-1}^n}{2\,\alpha \;+\beta} \;-\; \frac{\lambda}{2}\,(\, f(v_{j+1}^n) \;-\; f(v_{j-1}^n)\,)\,, \tag{2.21}$$

avec $\alpha > 0$, $\beta > 0$, étant réellement à 3 points, vérifie (2.20) sous la condition CFL renforcée:

$$\lambda\,|\lambda_i(u)| \;<\; \frac{2\alpha}{2\alpha + \beta}\,.$$

(Cette condition est celle assurant la stabilité linéaire L^2.)

Théorème 4 *Si le système (2.1) est strictement hyperbolique et les hypothèses (2.3), (2.15), (2.16), (2.17), (2.18), (2.19) et (2.20) sont satisfaites, il existe un voisinage* $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$ *de* u_0 *tel que, pour tout* $(u_g, u_d) \in \mathcal{W}' \times \mathcal{W}'$, *si* $(u_g, u_d, p/\lambda)$ *est un i-choc alors il existe* $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{W}^{\mathbb{Z}}$ *solution de (2.14) telle que*

$$\lim_{j\longrightarrow -\infty} u_j \;=\; u_g\,,\ \lim_{j\longrightarrow +\infty} u_j \;=\; u_d\,.$$

Remarque 3 *La solution n'est bien sûr pas unique, puisque pour tout $j_0 \in \mathbb{Z}$, la suite translatée définie par $\tilde{u}_j := u_{j+j_0}$ est encore solution. Il y a même un continuum de solutions comme on le verra dans la démonstration.*

2.2.2 La démonstration du théorème de Majda-Ralston

Le difféomorphisme T opérant sur un espace de "grande dimension" (égale à $N(k+k')$, où les entiers k et k' sont en fait ceux du schéma initial multipliés par q, le dénominateur de η), on cherche naturellement à se ramener à un problème de plus petite dimension. Ceci passe par

1. l'étude du difféomorphisme linéarisé $dT(\overline{u})$,
2. l'obtention d'une variété localement invariante par T,
3. l'étude de la dynamique sur cette variété.

1. La jacobienne $dT(\overline{u})$ est du type compagnon par blocs et on montre facilement le

Lemme 3 *Soient $z \in \mathbb{C}$ et $\Phi = {}^t(\phi_1, \cdots, \phi_{k+k'}) \in (\mathbb{R}^N)^{k+k'}$. Alors $dT(\overline{u}) \cdot \Phi = z\,\Phi$ si et seulement si*

$$\phi_\kappa = z^{\kappa-1}\,\phi_1\,,\ \kappa = 1, \cdots, k+k'\,,$$

avec

$$(\,I - z^p\,M(u;z)\,)\,\phi_1 = 0\,.$$

Par suite, z est une valeur propre de $dT(\overline{u})$ si et seulement si c'est un zéro de

$$z \mapsto c(u;z) := d\acute{e}t(\,I - z^p\,M(u;z)\,)\,.$$

D'autre part, on a

Lemme 4 *La valeur $z = 1$ est une racine d'ordre $N+1$ de $c(u_0;.)$. De plus, le sous-espace propre généralisé de $dT(\overline{u_0})$ pour la valeur propre $z = 1$ est*

$$\Delta \oplus \mathbb{R}e(u_0)\,,$$

où

$$\Delta := \{\Phi = \overline{\phi} \in (\mathbb{R}^N)^{k+k'}; \phi \in \mathbb{R}^N\}\,,\ e(u_0) := \begin{pmatrix} r_i(u_0) \\ 2\,r_i(u_0) \\ \vdots \\ (k+k')\,r_i(u_0) \end{pmatrix}.$$

Démonstration. La première partie repose sur le calcul préliminaire suivant. Pour $|z-1| < 1$, on montre que:

$$(2.22)\ z^p\,M(u;z) = \exp(\,\log z\,(\,p\,I - \lambda\,A(u)\,)\,) + \frac{1}{2}(\log z)^2\,B(u) + \mathcal{O}((\log z)^3)\,.$$

Or la matrice $(\,p\,I - \lambda\,A(u)\,)$ est diagonalisable dans la base $(r_1(u), \cdots, r_N(u))$. Plus précisément, on a:

$$P(u)^{-1}\,(\,p\,I - \lambda\,A(u)\,)\,P(u) = \begin{pmatrix} p - \lambda\,\lambda_1(u) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p - \lambda\,\lambda_N(u) \end{pmatrix},$$

où $P(u) := \begin{pmatrix} r_1(u) & \cdots & r_N(u) \end{pmatrix}$ et $P(u)^{-1} = \begin{pmatrix} \ell_1(u) \\ \vdots \\ \ell_N(u) \end{pmatrix}$. Comme $p = \lambda\,\lambda_i(u_0)$, on en déduit, pour $|z-1| < 1$,

$$c(u_0;z) \;=\; \text{dét}\,(\,I \,-\, z^p\,M(u_0;z)\,) \;=\; (\log z)^{N+1}\,\text{dét}(D(u_0;z)) \;+\; \mathcal{O}((\log z)^{N+2})\,,$$

où $D(u_0;z)$ est diagonale de coefficients

$$\delta_j(u_0;z) \;:=\; \frac{\exp(\,(\,p \,-\, \lambda\,\lambda_j(u_0)\,)\,\log z\,) - 1}{\log z}\,,$$

si $j \neq i$ et

$$\delta_i(u_0;z) \;:=\; \frac{1}{2}\,\ell_i(u_0)\,B(u_0)\,r_i(u_0)\,.$$

Ainsi

$$\text{dét}(D(u_0;z)) \;=\; \frac{1}{2}\,\ell_i(u_0)\,B(u_0)\,r_i(u_0)\,\prod_{j\neq i}\,(p - \lambda\,\lambda_j(u_0)) \;\neq\; 0,$$

d'après (2.19) et la stricte hyperbolicité de (2.1). L'application $z \mapsto c(u_0;z)$ admet donc, comme $z \mapsto (\log z)^{N+1}$, un zéro d'ordre $N+1$ en $z=1$. D'autre part, d'après le lemme 3, on a clairement:

$$\text{Ker}\;(\,dT(\overline{u_0}) \,-\, I\,) \;=\; \Delta\,.$$

De plus $e(u_0)$ est un vecteur propre généralisé. En effet, on calcule aisément:

$$(dT(\overline{u_0}) - I)\,e(u_0) = \overline{r_i(u_0)} \in \Delta.$$

En fait, on montre que Ker $(\,dT(\overline{u_0}) \,-\, I\,)^2 = \Delta \oplus \mathbb{R}\,e(u_0)$. Cet espace étant de dimension $N+1$, c'est-à-dire la multiplicité $N+1$ de $z=1$ comme racine de l'équation caractéristique, il n'y a pas d'autre vecteur propre généralisé. □

Enfin, on aura besoin du

Lemme 5 *Il existe un voisinage $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$ de u_0 et une application régulière*

$$\beta \;:\; \mathcal{W}' \;\longrightarrow\; \mathbb{R}$$

telle que

- *pour tout $u \in \mathcal{W}'$, $\beta(u)$ est valeur propre de $dT(\overline{u})$,*
- *au point u_0 on a:*

$$\beta(u_0) \;=\; 1\,,\; d\beta(u_0)\cdot r_i(u_0) \;=\; 2\,\frac{d\lambda_i(u_0)\cdot r_i(u_0)}{\ell_i(u_0)\,B(u_0)\,r_i(u_0)}\,.$$

Démonstration. On cherche $\beta = \exp\alpha$ avec α petit. Comme dans le lemme 4, on utilise le développement limité (2.22). En factorisant α^N ($z=1$ est racine d'ordre au moins N) on obtient, pour $u \to u_0$ et $\alpha \to 0$:

$$c(u;e^\alpha) = 0 \iff \Gamma(u;\alpha) = 0\,,$$

avec

$$\Gamma(u;\alpha) \;=\; p - \lambda\,\lambda_i(u) \;+\; \frac{\alpha}{2}\,\ell_i(u)\,B(u)\,r_i(u) \;+\; \mathcal{O}((p-\lambda\,\lambda_i(u))^2) \;+\; \mathcal{O}(\alpha^2)\,.$$

On voit que $\Gamma(u_0;0) = 0$ et $\dfrac{\partial\Gamma}{\partial\alpha}(u_0;0) \neq 0$ d'après (2.17) et 2.19). Le théorème des fonctions implicites permet de conclure. □

Remarque 4 *D'après l'hypothèse (2.18), l'application β est, comme λ_i, strictement monotone le long des courbes intégrales de r_i et donc aussi le long de la i-ème* courbe de Hugoniot *[15] au voisinage de u_g. De plus, d'après (2.19), son sens de variation est le même. Donc, d'après (2.6), si (u_g, u_d, σ) est un i-choc avec u_g et u_d proches de u_0, alors*

$$\beta(u_d) \ < \ \beta(u_0) = 1 \ < \ \beta(u_g)$$

Ceci interviendra de façon essentielle à la fin de la démonstration du théorème 4.

2. La condition (2.20) assure, d'après le lemme 3, que $z = 1$ est la seule valeur propre de module 1 de $dT(\overline{u_0})$. D'après le lemme 4 et le théorème de la variété centrale (voir [28]) on a le

Théorème 5 *Il existe un voisinage $\mathcal{V}' \subset \mathcal{W} \times \cdots \times \mathcal{W}$ de $\overline{u_0}$ dans $(\mathbb{R}^N)^{k+k'}$ et une variété $\mathcal{M} \subset (\mathbb{R}^N)^{k+k'}$ régulière, de dimension $N+1$ et tangente à $\Delta \oplus \mathbb{R}\, e(u_0)$ en u_0, tels que:*

- *Si $U \in \mathcal{V}' \cap \mathcal{M}$ alors $T(U) \in \mathcal{M}$ et $T^{-1}(U) \in \mathcal{M}$,*
- *Si $U \in \mathcal{V}'$ est tel que $T^j(U) \in \mathcal{V}'$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$ alors $U \in \mathcal{M}$.*

Remarque 5 *Le sous-espace vectoriel Δ, étant l'ensemble des points fixes de T, est nécessairement inclus dans $\mathcal{M}$. Comme Δ est de dimension N et $\mathcal{M}$ de dimension $N+1$, on peut choisir un jeu de coordonnées locales dans $\mathcal{M}$*

$$\begin{array}{rcccl} Y: & \mathcal{V}' \cap \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^{N+1} & \\ & U & \mapsto & Y(U) = \begin{pmatrix} y_0(U) \\ y_1(U) \\ \vdots \\ y_N(U) \end{pmatrix}, & \end{array}$$

de sorte que

$$Y(\overline{u_0}) \ = \ 0\,,$$

$$U \in \mathcal{V}' \cap \Delta \iff y_0(U) = 0\,,$$

et, pour pour fixer les idées,

$$U \in \mathcal{V}' \cap \Delta \implies U \ = \ \overline{u_0} \ + \ \sum_{1=1}^{N} y_i(U)\overline{r_i(u_0)}.$$

On suppose $\mathcal{W}'$ (du lemme 5) choisi tel que $\mathcal{W}' \times \cdots \times \mathcal{W}' \subset \mathcal{V}'$. Si $(u_g, u_d) \in \mathcal{W}' \times \mathcal{W}'$ et s'il existe une orbite hétérocline de T reliant $\overline{u_g}$ à $\overline{u_d}$, elle est nécessairement incluse dans $\mathcal{M}$. Jusqu'ici nous avons suivi fidèlement la démarche de Majda-Ralston. Nous allons maintenant conclure plus rapidement à l'existence d'une telle orbite, grâce à une quantité conservée le long des trajectoires cherchées. Supposons par exemple $p \geq 1$. Alors on a le:

Lemme 6 *Si $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{U}^{\mathbb{Z}}$ est un profil discret, solution de (2.14) reliant u_g en $-\infty$ à u_d en $+\infty$, alors pour tout $j \in \mathbb{Z}$:*

$$\lambda\, g(u_{j-k}, \cdots, u_{j+k'-1}) \ - \ \sum_{l=1}^{p} u_{j-l} \ = \ \lambda\, f(u_d) \ - \ p\, u_d \ = \ \lambda\, f(u_g) \ - \ p\, u_g\,.$$

Démonstration. On a en effet d'après (2.10) et (2.14):

$$\lambda\, g(u_{j-k}, \cdots, u_{j+k'-1}) \;-\; \sum_{l=1}^{p} u_{j-l} \;=\; \lambda\, g(u_{j-k+1}, \cdots, u_{j+k'}) \;-\; \sum_{l=1}^{p} u_{j-l+1}\,,$$

d'où le résultat d'après la consistance du schéma (2.3) et la condition de Rankine-Hugoniot (2.5). $\square$

Soit donc, si $p \geq 1$:

$$\begin{array}{llll} \Pi_p : & \mathcal{U}^{k+k'} & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ & (v_{-k}, \cdots, v_{k'-1}) & \mapsto & \Pi_p\,(v_{-k}, \cdots, v_{k'-1}) = \lambda\, g(v_{-k}, \cdots, v_{k'-1}) \;-\; \displaystyle\sum_{l=1}^{p} v_{-l}\,. \end{array}$$

Dans le cas $p = 0$, on définit simplement:

$$\begin{array}{llll} \Pi_0 : & \mathcal{U}^{k+k'} & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ & (v_{-k}, \cdots, v_{k'-1}) & \mapsto & \Pi_0\,(v_{-k}, \cdots, v_{k'-1}) = \lambda\, g(v_{-k}, \cdots, v_{k'-1})\,, \end{array}$$

et, si $p \leq -1$:

$$\begin{array}{llll} \Pi_p : & \mathcal{U}^{k+k'} & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ & (v_{-k}, \cdots, v_{k'-1}) & \mapsto & \Pi_p\,(v_{-k}, \cdots, v_{k'-1}) = \lambda\, g(v_{-k}, \cdots, v_{k'-1}) \;+\; \displaystyle\sum_{l=1}^{-p} v_{l-1}\,. \end{array}$$

Lemme 7 *Quitte à réduire les voisinages $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{W}'$ en conservant la propriété $\mathcal{W}' \times \cdots \mathcal{W}' \subset \mathcal{V}'$, si (u_g, u_d, σ) est un i-choc avec $(u_g, u_d) \in \mathcal{W}' \times \mathcal{W}'$, alors l'ensemble*

$$\mathcal{C} \;:=\; \{\; U \in \mathcal{V}' \cap \mathcal{M}\;;\; \Pi_p(U) \;=\; \lambda\,(\, f(u_g) \,-\, \sigma\, u_g\,)\;\}$$

est une courbe régulière invariante par T, transverse à Δ, contenant u_g et u_d.

Démonstration. L'application Π_p et sa restriction à $\mathcal{M}$ sont régulières. De plus, $d(\Pi_{p\,|\mathcal{M}})(\overline{u_0})$ est de rang maximum N. En effet, d'une part pour $\Phi = \overline{\phi} \in \Delta$ on a

$$d\Pi_p(\overline{u_0}) \cdot \Phi \;=\; (\,\lambda\, A(u_0) \;-\; p\, I\,)\, \phi\,,$$

car, d'après (2.3), $\displaystyle\sum_l \partial_l g(u, \cdots, u) = df(u) = A(u)$, et donc d'après (2.17):

$$d\Pi_p(\overline{u_0}) \cdot \Phi \in \oplus_{j \neq i}\, \mathbb{R}\, r_j(u_0)\,.$$

D'autre part, si l'on fait le calcul par exemple pour $p \leq -1$, on a:

$$d\Pi_p(\overline{u_0}) \cdot e(u_0) \;=\; \left(\lambda \sum_{l=-k+1}^{k'} l\, \partial_l g(u_0, \cdots, u_0) \;+\; \sum_{l=1}^{-p} l\right)\; r_i(u_0)\,,$$

ce qui se simplifie notablement grâce à l'identité:

$$\lambda \sum_{l=-k+1}^{k'} l\; \partial_l g(u, \cdots, u) \;=\; \frac{1}{2}\,(\lambda\, A(u) - B(u) - \lambda^2\, A(u)^2)\,.$$

On obtient ainsi d'après (2.17):

$$\ell_i(u_0) \cdot d\Pi_p(\overline{u_0}) \cdot e(u_0) \;=\; -\,\frac{1}{2}\; \ell_i(u_0)\, B(u_0)\, r_i(u_0)\,,$$

ce qui est non nul d'après (2.19). Donc

$$d\Pi_p(\overline{u_0}) \cdot (\, \Delta \,\oplus\, \mathbb{R}\, e(u_0)\,) \;=\; \mathbb{R}^N .$$

Par suite, $d(\Pi_{p\,|\mathcal{M}})(\overline{u_g})$ est aussi de rang maximum N pour u_g assez proche de u_0. Donc, pour $\mathcal{V}'$ assez petit, l'ensemble

$$\{\, U \in \mathcal{V}' \cap \mathcal{M} \;;\; \Pi_p(U) \;=\; \Pi_p(\overline{u_g})\,\}$$

est une courbe, contenant évidemment u_g, et aussi u_d, d'après la condition de Rankine-Hugoniot (2.5). De plus elle est transverse à Δ car, pour $\Phi = \overline{\phi} \neq 0 \in \Delta$, on a

$$d\Pi_p(\overline{u_{g,d}}) \cdot \Phi \;=\; (\,\lambda\, A(u_{g,d}) \;-\; p\, I\,)\,\phi \;\neq\; 0\,,$$

d'après (2.6) et $p \;=\; \lambda\,\sigma$. □

La courbe du lemme 7 fournit alors les orbites que l'on cherche. En effet, si $U \in \mathcal{C}$, les itérés $T^j(U)$ convergent vers $\overline{u_g}$ ou $\overline{u_d}$ lorsque j tend vers $\pm\infty$. Ceci ne détermine cependant pas le sens de parcours. Pour achever la démonstration du théorème 4, il faut préciser la dynamique sur $\mathcal{M}$. Cela se fait en reprenant d'assez près les calculs de [23]. On choisit des coordonnées locales comme indiqué dans la remarque 5. On note

$$\begin{array}{llll} \tau : & \mathcal{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{N+1} \\ & \vec{y} & \mapsto & \tau\,(\vec{y}) \;=\; Y \circ T \circ Y^{-1}\,(\vec{y}) \;-\; \vec{y} \end{array}$$

On note aussi $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \check{y} \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} \tau_0 \\ \check{\tau} \end{pmatrix}$. Les éléments de Δ étant des points fixes de T on a:

$$\tau \begin{pmatrix} 0 \\ \check{y} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ \check{0} \end{pmatrix},$$

et donc:

$$d(\mathrm{id} + \tau) \begin{pmatrix} 0 \\ \check{y} \end{pmatrix} \;=\; \left(\begin{array}{c|c} 1 + \partial_0 \tau_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \check{y} \end{pmatrix} & 0 \;\cdots\; 0 \\ \hline \partial_0 \check{\tau} \begin{pmatrix} 0 \\ \check{y} \end{pmatrix} & I \end{array} \right)$$

On reconnaît d'après le lemme 5:

$$b(\check{y}) := 1 + \partial_0 \tau_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \check{y} \end{pmatrix} \;=\; \beta \left(\pi \circ Y^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \check{y} \end{pmatrix} \right),$$

où

$$\begin{array}{llll} \pi : & \Delta & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ & \Phi = \bar{\phi} & \mapsto & \phi\,. \end{array}$$

On a en particulier

$$\begin{aligned} b(\check{0}) \;&=\; \beta(u_0) \;=\; 1\,, \\ \partial_i b(\check{0}) \;&=\; d\beta(u_0) \cdot r_i(u_0) \neq 0\,. \end{aligned}$$

Donc, par le théorème des fonctions implicites, il existe localement une variété de dimension $N-1$, $\Sigma_0 \subset \Delta$, transverse à $\overline{r_i(u_0)}$ telle que, pour $U \in \Sigma_0$, $b(\check{Y}(U)) = 1$. Notons enfin

$$\delta\tau_0(\vec{y}) := \begin{cases} \dfrac{\tau_0(\vec{y})}{y_0} & \text{si } y_0 \neq 0\,, \\[2ex] \partial_0 \tau_0(\vec{y}) & \text{si } y_0 = 0\,. \end{cases}$$

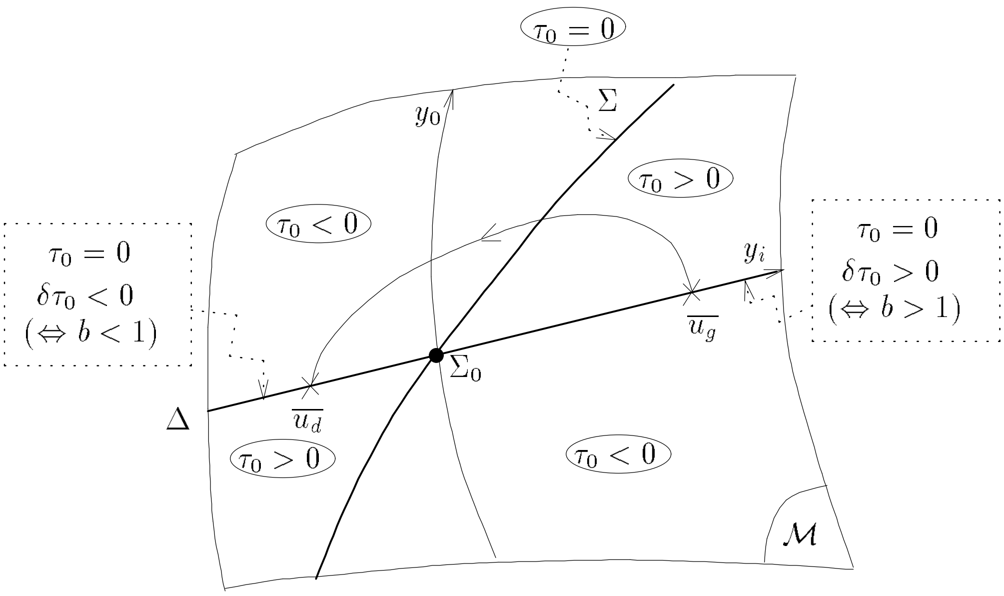

FIG. 2.1 - Dynamique de T sur $\mathcal{M}$

C'est une fonction régulière et on a

$$\delta\tau_0(\vec{0}) \;=\; b(\check{0}) - 1 \;=\; 0\,,$$

$$\partial_i\delta\tau_0(\vec{0}) \;=\; \partial_i b(\check{0}) \;\neq\; 0\,.$$

Donc par le théorème des fonctions implicites il existe localement une variété de dimension N, $\Sigma \subset \mathcal{M}$, transverse à $\overline{r_i(u_0)}$ telle que, pour $U \in \Sigma$, $\delta\tau_0(Y(U)) = 0$. Par définition, on a $\Sigma_0 \subset \Sigma$. Moyennant ces notations on peut décrire complètement la dynamique de T sur $\mathcal{M}$. Ceci est résumé sur la figure 2.1. Sont aussi figurés les points $\overline{u_g}$ et $\overline{u_d}$ et la trajectoire de l'un à l'autre. D'après la remarque 4, leurs positions respectives assurent que la trajectoire va bien de u_g à u_d.

2.3 Profils semi-discrets

Cette partie correspond en particulier à l'article [3].

Introduction

Étant donnés les problèmes soulevés par l'existence de profils discrets de vitesse irrationnelle, nous nous tournons maintenant vers le cas, plus simple, des profils *semi-discrets*.

Définition 9 *Un profil de choc semi-discret associé à un i-choc* (u_g, u_d, σ) *est une solution de l'équation différentielle avec retard et avance:*

(2.23)
$$\sigma\, u'(x) \;=\; g(u(x-k+1), \cdots, u(x+k')) \;-\; g(u(x-k), \cdots, u(x+k'-1))\,, \;\; x \in \mathbb{R}\,,$$

telle que:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} u(x) \;=\; u_g \;\; et \;\; \lim_{x \longrightarrow +\infty} u(x) \;=\; u_d\,.$$

Notons que l'équation (2.23) est la limite formelle de l'équation algébrique (2.8) lorsque λ tend vers 0. Pour le schéma de Lax-Friedrichs, ce passage à la limite n'a pas de sens, puisque son flux numérique comporte un terme en $1/\lambda$. Pour le schéma de Lax-Wendroff en revanche, on obtient simplement l'équation centrée:

$$\sigma\, u'(x) \;=\; f(u(x+1)) \;-\; f(u(x-1))\,.$$

En fait, un profil semi-discret est associé à une solution de la forme $v_j(t) \;=\; u(j - \sigma\, t/\Delta x)$ de la semi-discrétisation du système (2.1) par:

$$\frac{dv_j}{dt} + \frac{g(v_{j-k+1}, \cdots, v_{j+k'}) \;-\; g(v_{j-k}, \cdots, v_{j+k'-1})}{\Delta x} \;=\; 0\,, \tag{2.24}$$

dès lors que celle-ci a un sens (par exemple, si g ne dépend pas de λ). C'est le cas pour le schéma de Godunov. Si de plus, les valeurs propres de df sont toutes de même signe, par exemple si elles sont positives, alors l'équation (2.23) pour le schéma de Godunov se réduit à une équation différentielle avec retard:

$$\sigma\, u'(x) \;=\; f(u(x)) \;-\; f(u(x-1))\,, \; x \in \mathbb{R}\,, \tag{2.25}$$

entrant dans le cadre de la théorie de Hale [10]. Nous allons montrer comment exploiter cette théorie pour prouver l'existence de profils semi-discrets [3]. Puis nous montrerons comment l'on peut espérer obtenir le résultat dans le cas avec retard *et* avance, d'après une idée et la théorie de Iooss sur les systèmes dynamiques en dimension infinie [32].

2.3.1 Profils semi-discrets décentrés

Théorème 6 *Supposons le système (2.1) strictement hyperbolique et tel que les valeurs propres de* $df(u)$ *soient positives pour tout* $u \in \mathcal{U}$. *Soit* $i \in \{1, \cdots, N\}$ *tel que le i-ème champ caractéristique soit vraiment non-linéaire. Alors, pour tout* $u_g \in \mathcal{U}$, *il existe un voisinage* $\mathcal{W}$ *de* u_g *tel que, si* (u_g, u_d, σ) *est un i-choc avec* $u_d \in \mathcal{W}$, *il existe une famille à un paramètre de solutions de (2.25) telles que*

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} u(x) \;=\; u_g\,, \;\; \lim_{x \longrightarrow +\infty} u(x) \;=\; u_d\,.$$

La démonstration repose sur l'étude de la dynamique du système de N équations différentielles avec retard (2.25), au voisinage de la solution constante $u \equiv u_g$. En fait, comme Majda et Pego à propos des profils visqueux [22], on considère la vitesse σ comme une fonction inconnue supplémentaire (constante). Celle-ci étant strictement positive d'après (2.6) et l'hypothèse $\lambda_i > 0$, on pose $\tau = 1/\sigma$ et l'on augmente (2.25) d'une équation triviale. Ceci conduit à un système de $N+1$ équations différentielles avec retard:

$$\left\{ \begin{array}{l} u'(x) = \tau(x)\,(\,f(u(x)) - f(u(x-1)\,) \\ \tau'(x) = 0 \end{array} \right. , \; x \in \mathbb{R}\,. \tag{2.26}$$

Pour démontrer le théorème 6, il est alors équivalent de démontrer:

Théorème 7 *Sous les hypothèses du théorème 6, pour tout $u_g \in \mathcal{U}$, il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de u_g tel que, si (u_g, u_d, σ) est un i-choc avec $u_d \in \mathcal{W}$, il existe une famille à un paramètre de solutions de (2.26) telles que*

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} u(x) = u_g\,, \quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} u(x) = u_d\,,$$

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \tau(x) = 1/\sigma\,.$$

La démonstration du théorème 7 repose quant à elle sur l'étude du système (2.26) linéarisé autour de la solution constante $U_0 \equiv {}^t(u,\tau) \equiv {}^t(u_g, \lambda_i(u_g))$. Ce dernier est de la forme:

$$V'(x) = M\,(\,V(x) - V(x-1)\,)\,, \tag{2.27}$$

où V est à $N+1$ composantes et $M \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$. En suivant Hale, on peut voir (2.27) comme un système dynamique en dimension infinie. En effet, il est assez facile de montrer que le "problème de Cauchy" associé à (2.27) et une condition "initiale":

$$V(\theta) = \phi(\theta)\,,\; \theta \in [-1,0]\,,$$

où $\phi \in \mathcal{C}([-1,0];\mathbb{R}^{N+1})$, est bien posé au sens suivant. On introduit la notation $V_x \in \mathcal{C}([-1,0];\mathbb{R}^{N+1})$ dès que V est une fonction continue sur $[x-1,x]$:

$$\begin{array}{rccc} V_x : & [-1,0] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{N+1} \\ & \theta & \mapsto & V_x(\theta) = V(x+\theta)\,. \end{array}$$

Alors la solution de

$$V'(x) = M\,(\,V(x) - V(x-1)\,)\,,\; V_0 = \phi\,,$$

est donnée par:

$$V_x = T_0(x)\,\phi\,,$$

où $(T_0(x))_{x>0}$ est un semi-groupe continu, de générateur infinitésimal:

$$\begin{array}{rccc} A : & \mathcal{D}(A) & \longrightarrow & \mathcal{C}([-1,0];\mathbb{R}^{N+1}) \\ & \phi & \mapsto & \dfrac{d\phi}{d\theta}\,, \end{array}$$

où:

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ \phi \in \mathcal{C}^1([-1,0];\mathbb{R}^{N+1})\,;\; \frac{d\phi}{d\theta}(0) = M\,(\,\phi(0) - \phi(-1)\,) \right\}.$$

L'opérateur A, comme pour les équations plus générales considérées par Hale, a de très bonnes propriétés. En particulier, le spectre de A (dont l'intersection avec tout demi-plan $\{ z ;\ \mathrm{Re}\, z > \beta \}$ est finie) est constitué exclusivement de valeurs propres, racines de l'équation caractéristique:

$$\mathrm{dét}(z I - M + e^{-z} M) = 0 .$$

Dans notre cas, on montre aisément que la seule valeur propre imaginaire pure est 0, de multiplicité $N+2$. Le sous-espace propre généralisé $P = \mathrm{Ker}\,(A^2)$ est aussi facilement calculable. D'autre part, on peut associer à A un "adjoint" formel,

$$\begin{array}{rccc} A^* : & \mathcal{D}(A^*) & \longrightarrow & \mathcal{C}([0,1];(\mathbb{R}^{N+1})^*) \\ & \alpha & \mapsto & -\dfrac{d\alpha}{ds}\,, \end{array}$$

où

$$\mathcal{D}(A^*) = \left\{ \alpha \in \mathcal{C}^1([0,1];(\mathbb{R}^{N+1})^*) ;\ -\frac{d\alpha}{ds}(0) = (\,\alpha(0) - \alpha(1)\,)\, M \right\} .$$

L'opérateur A^* permet alors de décomposer explicitement l'espace $C := \mathcal{C}([-1,0];\mathbb{R}^{N+1})$ en

$$C = P \oplus Q\,,$$

où

$$Q := \{\, \phi \in C \,;\ \forall \alpha \in \mathrm{Ker}\,((A^*)^2),\ \alpha(0)\,\phi(0) - \int_{-1}^{0} \alpha(\theta+1)\, M\, \phi(\theta)\, d\theta = 0 \,\} .$$

(Le noyau de $(A^*)^2$ est, comme celui de A^2, de dimension finie $N+2$.) Le choix de bases appropriées pour P et $\mathrm{Ker}\,((A^*)^2)$ permet de calculer facilement la projection sur P, à l'aide du produit formel

$$< \alpha, \phi > := \alpha(0)\,\phi(0) - \int_{-1}^{0} \alpha(\theta+1)\, M\, \phi(\theta)\, d\theta .$$

L'étape suivante de la démonstration du théorème 7 consiste à appliquer le théorème de la variété centrale de Hale à l'équation non-linéaire (2.26): il existe une variété de dimension $N+2$, localement invariante par le semi-groupe $(T(x))_{x>0}$ de (2.26), et contenant toutes les orbites restant au voisinage de la fonction constante $U_0 \equiv {}^t(u_g, \lambda_i(u_g))$. De plus, les outils de calcul mis en place lors de l'étude du linéarisé permettent de décrire très précisément la dynamique de $(T(x))_{x>0}$ sur cette variété.

Enfin, comme on l'avait fait pour les profils discrets, on utilise une fonctionnelle invariante pour réduire la dimension du problème. On remarque en effet que, pour toute solution (u,τ) de (2.26), la fonction τ est bien sûr constante, mais il en est de même pour la fonction

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ x & \mapsto & u(x) - \tau(x) \displaystyle\int_{x-1}^{x} (\, f(u(y)) - f(u_g)\,)\, dy . \end{array}$$

En particulier, pour toutes les solutions constantes du type ${}^t\,(u \equiv u_g, \tau \equiv \tau_0)$, on a:

$$u(x) - \tau(x) \int_{x-1}^{x} (\, f(u(y)) - f(u_g)\,)\, dy = u_g . \tag{2.28}$$

De plus, d'après la condition de Rankine-Hugoniot (2.5), on a aussi (2.28) le long de la solution constante ${}^t(u \equiv u_d, \tau \equiv 1/\sigma)$. Par suite, on peut chercher les orbites de T reliant le point fixe

$$U_g := \begin{pmatrix} u \equiv u_g \\ \tau \equiv 1/\sigma \end{pmatrix}$$

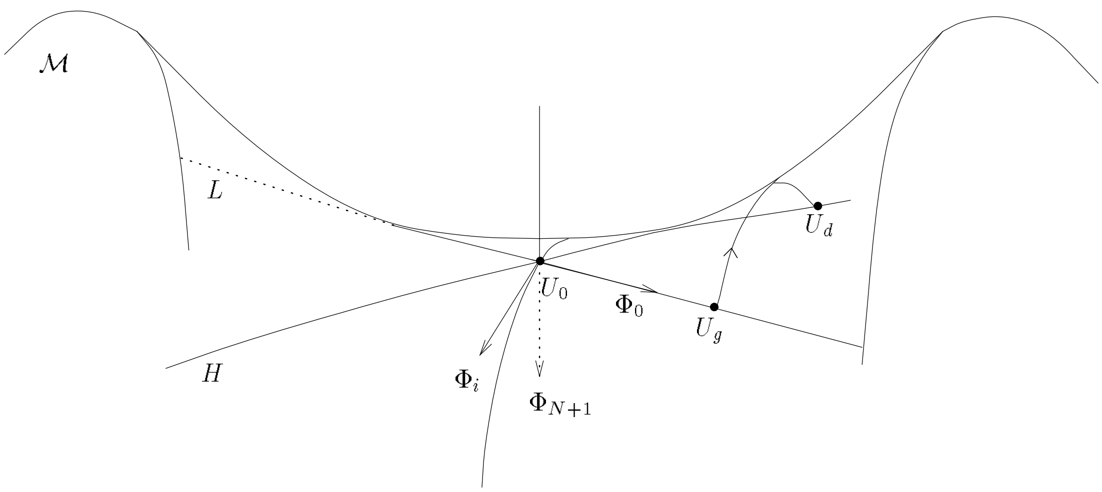

FIG. 2.2 - Dynamique de T sur $\mathcal{M}$, où Φ_0, Φ_i, Φ_{N+1} sont des fonctions de base de Ker (A^2)

au point fixe

$$U_d := \begin{pmatrix} u \equiv u_d \\ \tau \equiv 1/\sigma \end{pmatrix},$$

dans l'ensemble des fonctions satisfaisant (2.28). Or, on montre que l'ensemble des fonctions satisfaisant (2.28) et appartenant à la variété centrale de T en U_0 est une variété de dimension 2, $\mathcal{M}$, (invariante par T). Cette variété contient bien sûr la *droite* L des points fixes de la forme ${}^t(u \equiv u_g, \tau \equiv \tau_0)$ ainsi que la *courbe* H, obtenue à l'aide de la i-ème courbe de Hugoniot, des points fixes de la forme ${}^t(u \equiv u_d, \tau \equiv 1/\sigma)$ tels que (u_g, u_d, σ) soit un i-choc. On montre que le flot de T sur $\mathcal{M}$ est transverse à L et H. On montre aussi à l'aide de (2.6) que ce flot relie bien U_g à U_d et non l'inverse (cf Fig. 2.2). (Pour plus de détails, voir [3].)

2.3.2 Profils semi-discrets généraux

On considère maintenant un système d'équations différentielles avec retard *et* avance du type (2.23). Bien qu'il n'entre pas dans le cadre de la théorie de Hale, on peut aussi regarder ce type d'équations comme un système dynamique en dimension infinie. Ce dernier opère alors sur $\mathcal{C}([-k,k'];\mathbb{R}^N)$. Plus précisément, on introduit comme plus haut la notation $u_x \in \mathcal{C}([-k,k'];\mathbb{R}^N)$, dès que u est continue sur $[x-k, x+k']$:

$$\begin{array}{rccc} u_x : & [-k,k'] & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ & \theta & \mapsto & u_x(\theta) \;=\; u(x+\theta)\,. \end{array}$$

On associe ensuite à u_x le vecteur $z_x \in \mathbb{R}^N$:

$$z_x \;=\; u_x(0)\,. \tag{2.29}$$

Avec ces notations, le système (2.23) est alors équivalent au système formé de (2.29) et:

(2.30)
$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{du_x}{dx} \;=\; \dfrac{du_x}{d\theta} \\[2ex] \dfrac{dz_x}{dx} \;=\; \big(\, g(u_x(-k+1),\cdots,u_x(k')) \;-\; g(u_x(-k),\cdots,u_x(k'-1))\,\big)/\sigma \end{array} \right. \qquad , \; x \in \mathbb{R}\,.$$

On a donc un système dynamique (2.30) sur $E := \mathcal{C}([-k,k'];\mathbb{R}^N)\times\mathbb{R}^N$, assorti d'une "condition aux limites" (2.29). Cette formulation est dûe à une idée de G. Iooss. On va voir qu'en fait elle généralise une formulation déjà présente dans [10]. En effet, le système (2.30) linéarisé autour d'un point fixe ${}^t(u \equiv \bar u\,,\, z = \bar u\,)$ s'écrit:

$$(2.31)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dv_x}{dx} &= \frac{dv_x}{d\theta} \\ \frac{dw_x}{dx} &= \sum_{l=-k+1}^{k'} \partial_l g(\bar u,\cdots,\bar u)\,(\,v_x(l) - v_x(l-1)\,)/\sigma \end{aligned}\right. \qquad ,\ x\in\mathbb{R}\,.$$

c'est-à-dire:

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} v_x \\ w_x\end{pmatrix} = \widehat{A}\begin{pmatrix} v_x \\ w_x\end{pmatrix},$$

où l'opérateur $\widehat{A}$ est défini par

$$\widehat{A} : \begin{pmatrix}\phi \\ c\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{d\phi}{d\theta} \\ L\cdot\phi := \displaystyle\sum_{l=-k+1}^{k'} \partial_l g(\bar u,\cdots,\bar u)\,(\,\phi(l) - \phi(l-1)\,)/\sigma \end{pmatrix},$$

de domaine:

$$\mathcal{D}(\widehat{A}) = \left\{ \begin{pmatrix}\phi \\ c\end{pmatrix} \in E\,;\ \phi\in\mathcal{C}^1([-1,0];\mathbb{R}^N)\ \text{ et } c = \phi(0) \right\}.$$

La contrainte $c = \phi(0)$ dans $\mathcal{D}(\widehat{A})$ est imposée par la "condition aux limites" (2.29). Dans le cas du schéma décentré étudié plus haut, où $k = 1$, $k' = 0$, l'opérateur $\widehat{A}$ n'est autre que celui introduit par Hale au paragraphe 7.3 de [10], et relié d'assez près à l'opérateur A que nous avons utilisé. A la différence de A cependant, $\widehat{A}$ est fermé à domaine *non dense*. Mais l'on peut, tout comme dans [10], obtenir une représentation de la résolvante de $\widehat{A}$. On introduit pour cela la matrice caractéristique:

(2.32)

$$\Delta(z) = z\,I - L\cdot(e^{\theta z}) = z\,I - \sum_{l=-k+1}^{k'} \partial_l g(\bar u,\cdots,\bar u)\,(\,e^{lz} - e^{(l-1)z}\,)/\sigma\ ,\ z\in\mathbb{C}.$$

(Notons que c'était aussi la matrice caractéristique de l'opérateur A dans le cas du schéma décentré.)

Théorème 8 *Soit $z\in\mathbb{C}$. Alors $z\in\rho(\widehat{A})$ si et seulement si $\Delta(z)\in GL_N(\mathbb{C})$. De plus, on a:*

$$(2.33)\ (\,z\,I - \widehat{A}\,)^{-1}\begin{pmatrix}\phi \\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\theta z}\left[\Delta(z)^{-1}K(z)\begin{pmatrix}\phi \\ c\end{pmatrix} - \displaystyle\int_0^\theta e^{-sz}\,\phi(s)\,ds\right] \\ \Delta(z)^{-1}K(z)\begin{pmatrix}\phi \\ c\end{pmatrix}\end{pmatrix},$$

où:

$$K(z)\begin{pmatrix}\phi \\ c\end{pmatrix} := c - L\cdot\left(\int_0^\theta e^{(\theta-s)z}\,\phi(s)\,ds\right).$$

La suite du travail consiste à étudier plus précisément le spectre et la résolvante de $\widehat{A}$. L'objectif est de montrer que le problème linéarisé hyperbolique (au sens des systèmes dynamiques) non homogène est bien posé et d'appliquer le théorème de la variété centrale de Iooss [32]. Ceci pourrait faire partie de la thèse d'un élève de l'Ecole Centrale de Lyon, P. Huot, à commencer en septembre 1998 sous ma responsabilité.

Chapitre 3

Transitions de phase et profils visco-capillaires

Les articles concernés par ce chapitre sont [6] et [5].

Introduction

Considérons les équations d'Euler:

$$\begin{aligned} &\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \\ &\partial_t(\rho \vec{u}) + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p(\rho) = 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

modélisant l'écoulement d'un fluide compressible isotherme, de densité $\rho > 0$, de vitesse $\vec{u} \in \mathbb{R}^d$ et de pression p. En fait, dans ce chapitre, on s'intéresse essentiellement aux *ondes planes* solutions de (3.1). C'est pourquoi on se concentre sur le système réduit monodimensionnel:

$$\begin{aligned} &\partial_t \rho + \partial_x (\rho u) = 0, \\ &\partial_t (\rho u) + \partial_x (\rho u^2 + p(\rho)) = 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

où la vitesse (normale) u est un scalaire. Lorsque le fluide est un gaz parfait isotherme, la pression p est fonction partout croissante de $\rho > 0$, et le système (3.2) est hyperbolique dans le domaine $\{ (\rho, u) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \}$. Lorsque le fluide est un gaz "réel", avec une loi de pression de type van der Waals, le domaine d'hyperbolicité peut se scinder en deux composantes connexes. C'est le cas avec la loi de van der Waals:

$$p = \frac{RT}{v - b} - \frac{a}{v^2}, \; v = \frac{1}{\rho}, \tag{3.3}$$

où R est la constante des gaz parfaits, $a > 0$ et $b > 0$ sont des données du fluide, lorsque la température T s'abaisse en dessous de la température critique:

$$T_c = \frac{8a}{27bR}.$$

La fonction p est alors décroissante par rapport à v (donc croissante par rapport à ρ) dans $]b, v_\star[\cup]v^\star, +\infty[$ seulement. La zone dite spinodale, $]v_\star, v^\star[$, où (3.2) est elliptique, n'est pas observable physiquement. Lorsque $v < v_\star$, le fluide se trouve en phase liquide tandis que, lorsque $v > v^\star$, le fluide se trouve en phase vapeur. Dans l'écoulement d'un tel fluide, on s'attend à la propagation de *transitions de phase*, c'est-à-dire des ondes progressives:

$$\begin{pmatrix} \rho(x,t) \\ u(x,t) \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \rho_g \\ u_g \end{pmatrix}, & \text{si } x < \sigma t\,, \\[2ex] \begin{pmatrix} \rho_d \\ u_d \end{pmatrix}, & \text{si } x > \sigma t\,, \end{cases}$$

où ρ_g et ρ_d sont dans deux phases différentes. Ces ondes ressemblent à des ondes de choc. Cependant les transitions de phase qui nous intéressent ne vérifient pas la condition de choc de Lax. En effet, elles sont telles que:

$$\frac{dp}{dv}(v_{g,d}) < \frac{p(v_d) - p(v_g)}{v_d - v_g} < 0\,. \tag{3.4}$$

Ceci implique que les nombres de Mach relatifs, définis par:

$$M_{g,d} := \frac{|\, u_{g,d} - \sigma \,|}{c_{g,d}}\,,$$

où c est la vitesse du son:

$$c_{g,d} := \left(\frac{dp}{d\rho}(\rho_{g,d}) \right)^{1/2},$$

sont *tous deux inférieurs à 1* (dans un choc de Lax, l'un de ces nombres doit être supérieur à 1). Il suffit pour le vérifier de remarquer, d'après la condition de Rankine-Hugoniot:

$$\begin{aligned} \rho_g\,(\,u_g - \sigma\,) &= \rho_d\,(\,u_d - \sigma\,)\,, \\ \rho_g\,(\,u_g - \sigma\,)\,u_g + p_g &= \rho_d\,(\,u_d - \sigma\,)\,u_d + p_d\,, \end{aligned} \tag{3.5}$$

que:

$$\rho_g^2\,(\,u_g - \sigma\,)^2 = \rho_d^2\,(\,u_d - \sigma\,)^2 = -\,\frac{p_d - p_g}{v_d - v_g}\,.$$

Par suite, les transitions de phase satisfaisant (3.4) sont *sous-compressives*, au sens où:

$$(\,u_g \pm c_g - \sigma\,)\,(\,u_d \pm c_d - \sigma\,) > 0\,.$$

C'est une des raisons pour lesquelles la condition de Rankine-Hugoniot ne suffit pas à déterminer une telle transition de phase. Il y a aussi des raisons de nature physique. Par exemple, toutes les transitions de phase *statiques*, telles que:

$$u_g = u_d = \sigma\,, \quad p_g = p_d\,,$$

satisfont la condition de Rankine-Hugoniot (3.5). Pourtant, seul l'*équilibre de Maxwell*, à la pression $\bar{p} := p_g = p_d$ vérifiant la règle des aires égales:

$$\int_{v_g}^{v_d} (\,\bar{p} - p(v)\,)\,dv = 0\,, \tag{3.6}$$

est physiquement admissible. Différents auteurs ont travaillé à l'obtention d'un critère d'admissibilité des transitions de phase *dynamiques*, c'est-à-dire telles que le flux de masse à l'interface, défini d'après (3.5) par:

$$j := \rho_g\,(\,u_g - \sigma\,) = \rho_d\,(\,u_d - \sigma\,)\,,$$

soit non nul. En particulier, Slemrod [29] et Truskinovsky [31] (et références incluses) sont indépendamment parvenus au *critère visco-capillaire*, que nous adoptons ici. Ce critère demande que les transitions de phase admettent des *profils visco-capillaires*, c'est-à-dire des ondes progressives, solutions des équations d'Euler dans lesquelles on ajoute un terme dissipatif, lié à un coefficient de viscosité $\mu \geq 0$, et un terme dispersif, lié à un coefficient de capillarité $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) &= 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) &= \mu \, \partial^2_{xx} u - \varepsilon \, \partial^3_{xxx} v \end{aligned} \tag{3.7}$$

Définition 10 *Un profil visco-capillaire d'une transition de phase (v_g, v_d, σ) est une solution régulière de (3.7), de la forme*

$$(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mapsto \begin{pmatrix} \rho\left(\frac{x-\sigma t}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \\ \\ u\left(\frac{x-\sigma t}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

telle que:

$$\lim_{\xi \to -\infty} \rho(\xi) = 1/v_g \quad \text{et} \quad \lim_{\xi \to +\infty} \rho(\xi) = 1/v_d \,. \tag{3.9}$$

Si $\xi \mapsto (\rho(\xi), u(\xi))$ est un profil visco-capillaire, la fonction $\xi \mapsto u(\xi)$ doit aussi admettre des limites, $u_{g,d}$, en $\pm\infty$. De plus, les valeurs extrêmes doivent satisfaire la condition de Rankine-Hugoniot (3.5), c'est-à-dire encore, en éliminant la vitesse σ au profit du flux de masse j:

$$\begin{aligned} u_g - j\, v_g &= u_d - j\, v_d \,, \\ p_g + j^2\, v_g &= p_d + j^2\, v_d \,. \end{aligned} \tag{3.10}$$

A l'aide de (3.10) et d'une première intégration on peut reformuler le problème (3.7) (3.8) (3.9) en éliminant la vitesse u. Finalement, on aura une transition de phase admissible entre v_g et v_d avec un flux de masse j si et seulement s'il existe une solution régulière de

$$v'' = \frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon}}\, j\, v' + p(v_g) + j^2\, v_g - p(v) - j^2\, v \,, \tag{3.11}$$

telle que

$$\lim_{\xi \to -\infty} v(\xi) = v_g \quad \text{et} \quad \lim_{\xi \to +\infty} v(\xi) = v_d \,. \tag{3.12}$$

Définition 11 *Soit*

$$\nu := \frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon}} \,.$$

Une solution de (3.11) (3.12) sera appelée un ν-profil et la transition de phase correspondante, (v_g, v_d, j), sera dite ν-admissible.

Remarque 6 *Nous avons utilisé la formulation Eulérienne du mouvement (3.2) en vue de l'étude multidimensionnelle du chapitre 4. Dans la littérature sur les transitions de phase monodimensionnelles, la formulation Lagrangienne:*

$$\begin{aligned} \partial_t v - \partial_x u &= 0 \,, \\ \partial_t u + \partial_x p(v) &= 0 \,, \end{aligned} \tag{3.13}$$

est souvent utilisée pour des raisons de simplicité (la première équation de (3.13) est linéaire). Par ailleurs, le p-système (3.13) modélise également l'évolution d'un matériau hyperélastique, de déformation v, de vitesse u et dont le tenseur de contraintes est $-p$.

Or des transitions de phase peuvent aussi intervenir dans un tel matériau [7]. De nombreuses références traitent de ce problème (voir par exemple [1], [16], [24]). Quel que soit le contexte, dynamique des fluides ou élasticité, on peut toujours adopter le critère visco-capillaire concernant l'admissibilité des transitions de phase pour le système (3.13). L'équation de profil à laquelle on aboutit est alors analogue à (3.11), où le flux de masse j *est simplement remplacé par* $-\sigma$, σ *étant la vitesse de la discontinuité. L'analyse qui suit ne dépend donc pas du cadre choisi.*

L'objet de ce chapitre est d'étudier en détail l'ensemble des transitions de phase admissibles lorsque le paramètre ν (toujours positif ou nul) est proche de 0.

Notons que l'on retrouve, par le critère visco-capillaire, la règle des aires égales de Maxwell pour les transitions de phase statiques. En effet, dans le cas $j = 0$, l'équation de profil (3.11) se simplifie en:

$$v'' = p(v_g) - p(v)\,,$$

dont une intégrale première est clairement

$$H(v, v') = \frac{1}{2}\, v'^2 - \int_{v_g}^{v} (\, p(v_g) - p(\tau)\,)\, d\tau\,.$$

Ainsi l'existence de ν-profils dans le cas $j = 0$ équivaut à (3.6) avec $\bar{p} = p(v_g) = p(v_d)$.

3.1 Transitions de phase réversibles

Lorsqu'on néglige la viscosité, c'est-à-dire dans le cas $\nu = 0$, l'ensemble des transitions de phase admissibles est particulièrement simple à étudier. En effet, l'équation de profil (3.11) se réduit à:

$$v'' = p(v_g) + j^2\, v_g - p(v) - j^2\, v\,,$$

dont une intégrale première est:

$$H(v, v'; j) = \frac{1}{2}\, v'^2 - \int_{v_g}^{v} (\, p(v_g) + j^2\, v_g - p(\tau) - j^2\, \tau\,)\, d\tau\,.$$

On en déduit aisément que l'existence de 0-profils équivaut à la *règle des aires égales généralisée*:

$$\int_{v_g}^{v_d} (\, \pi - p(v) - j^2\, v\,)\, dv = 0\,, \tag{3.14}$$

avec

$$\pi := p(v_g) + j^2\, v_g = p(v_d) + j^2\, v_d\,. \tag{3.15}$$

Proposition 3 *Soit* $p \in \mathcal{C}^1(]b, +\infty[)$ *telle que*

1. *il existe* $(v_\star, v^\star) \in]b, +\infty[\times]b, +\infty[$, $v_\star < v^\star$, *tels que:*

$$p'(v) < 0 \;\; si \;\; b < v < v_\star \;\; ou \;\; v > v^\star\,,\;\; p'(v) > 0 \;\; si \;\; v_\star < v < v^\star\,,$$

2. *on ait:*

$$\lim_{v \to b} p(v) = +\infty\,,\quad \lim_{v \to +\infty} p(v) = 0\,,$$

3. *le graphe de* p *ait seulement deux points d'inflexion, l'un dans* $]v_\star, v^\star[$, *l'autre dans* $]v^\star, +\infty[$,

4. on ait:

$$p'(v_m) < p'(v_1),$$

où $v_m < v_\star$ est le plus petit des points de Maxwell, définis par

$$\int_{v_m}^{v_M} (\,\bar{p} - p(v)\,)\,dv = 0, \quad \bar{p} = p(v_m) = p(v_M),$$

et $v_1 > v^\star$ est l'unique point où la corde reliant $(v_m, \bar{p})$ à $(v_1, p(v_1))$ soit tangente au graphe de p (voir Fig. 3.1).

Alors, pour tout j tel que

$$j^2 \leq -p'(v_1), \tag{3.16}$$

il existe exactement deux transitions de phase 0-admissibles, (v_g, v_d, j), telles que $(v_g, v_d) = (v_\mp, v_\pm)$, où $(v_-, v_+) \in]b, v_m] \times [v_M, v_1[$ est l'unique solution de:

$$\int_{v_-}^{v_+} (\,\pi - p(v) - j^2\,v\,)\,dv = 0, \quad \pi = p(v_-) + j^2\,v_- = p(v_+) + j^2\,v_+ \,.$$

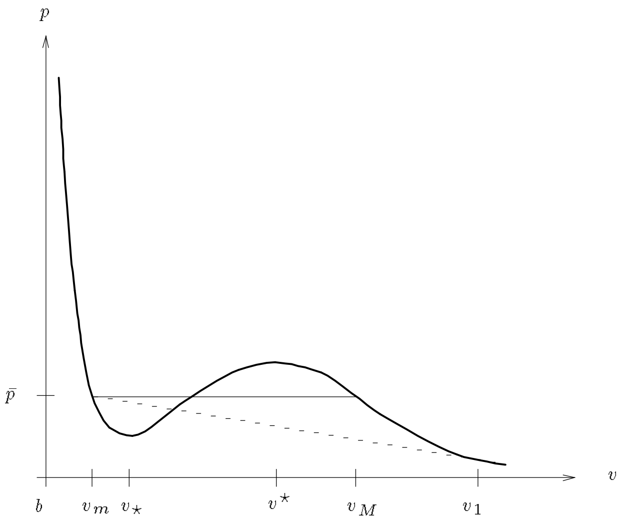

FIG. 3.1 - Points remarquables sur le graphe de p.

Remarque 7 *Les hypothèses sur p dans la proposition 3 sont satisfaites par la loi de van der Waals des fluides "classiques" (voir par exemple la figure 3.2). Concernant le point 4, on observe encore mieux en pratique:*

$$p'(v_m) < p'(v), \ \forall v \geq v^\star.$$

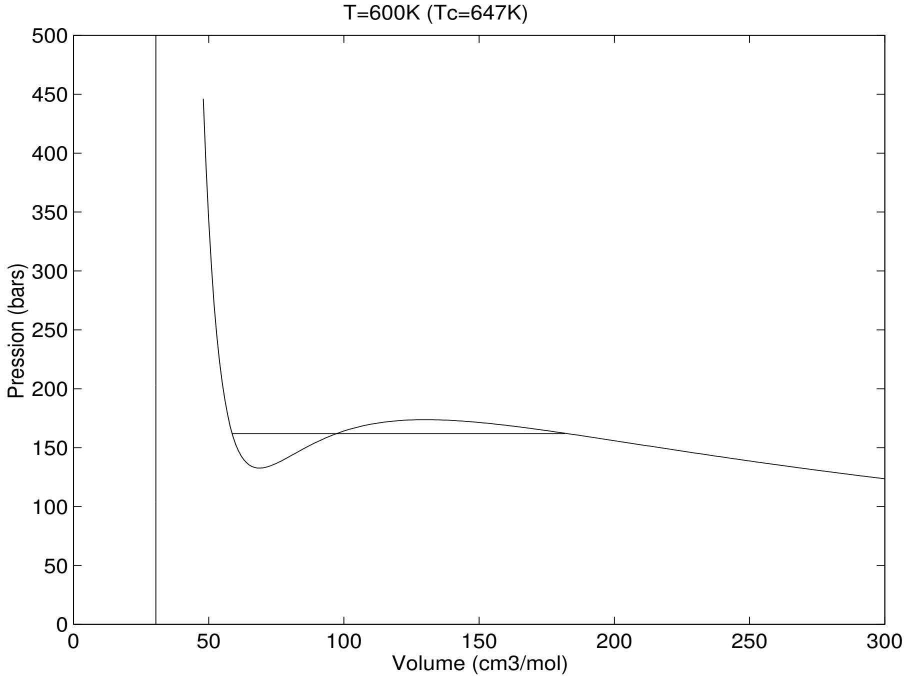

FIG. 3.2 - Loi de van der Waals pour l'eau (a et b tirés de [33])

Démonstration. Elle est de nature géométrique. Les points de Maxwell, (v_m, v_M), sont bien définis car la fonction

$$\begin{array}{ccc} [p(v_\star), p(v^\star)] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ p & \mapsto & \displaystyle\int_{v_{min}(p)}^{v_{Max}(p)} (\, p \,-\, p(v)\,)\, dv \;=\; 0\,, \end{array}$$

$$\text{où } v_{min} \leq v_\star\,,\; v_{Max} \geq v^\star \text{ sont t.q.}$$

$$p \;=\; p(v_{min}) \;=\; p(v_{Max})\,,$$

est strictement croissante et négative en $p(v_\star)$, positive en $p(v^\star)$. Soit j satisfaisant (3.16). Le cas $j = 0$ redonne les points de Maxwell. On peut donc supposer $j \neq 0$. Alors la droite passant par $(v_m, \bar{p})$, de pente $-j^2$, recoupe le graphe de p en un point et un seul de l'intervalle $]v_M, v_1]$. Notons v_2 ce point. On a clairement:

$$\int_{v_m}^{v_2} (\, p(v_m) \,+\, j^2\, v_m \,-\, p(v) \,-\, j^2\, v\,)\, dv \;<\; \int_{v_m}^{v_M} (\, \bar{p} \,-\, p(v)\,)\, dv \;=\; 0\,.$$

Par un argument analogue à celui utilisé pour construire les points de Maxwell, on en déduit l'existence et l'unicité de $(v_-, v_+) \in]b, v_m] \times [v_M, v_1[$ tel que:

$$\int_{v_-}^{v_+} (\, \pi \,-\, p(v) \,-\, j^2\, v\,)\, dv \;=\; 0\,, \quad \pi \;=\; p(v_-) \,+\, j^2\, v_- \;=\; p(v_+) \,+\, j^2\, v_+\,.$$

$\square$

3.2 Transitions de phase faiblement dissipatives

Dans le cas $\nu > 0$, l'existence de ν-profils peut être abordée par des méthodes topologiques. Mais nous nous intéressons ici surtout au cas où le paramètre ν est petit et nous cherchons des résultats locaux sur l'ensemble des transitions de phase admissibles. C'est pourquoi nous préférons une approche de type *bifurcation*. Étant donnée une transition de phase réversible (v_g^0, v_d^0, j_0), nous allons étudier les transitions de phase voisines, (v_g, v_d, j), faiblement dissipatives. Pour cela, nous allons considérer le système dynamique étendu [1]:

$$
(3.17) \qquad \begin{cases} v' \,=\, w\,, \\[2ex] w' \,=\, \nu\, j\, w \,+\, \pi \,-\, p(v) \,-\, j^2\, v\,, \\[2ex] \pi' \,=\, 0\,, \\[2ex] j' \,=\, 0\,, \\[2ex] \nu' \,=\, 0\,, \end{cases}
$$

et chercher les solutions voisines de

$$\xi \;\mapsto\; {}^t(\, v_0(\xi)\,,\, v_0{}'(\xi)\,,\, \pi_0\,,\, j_0\,,\, 0\,)\,,$$

où v_0 est un 0-profil associé à (v_g^0, v_d^0, j_0) et

$$\pi_0 \,=\, p(v_g^0) \,+\, j_0^2\, v_g^0 \,=\, p(v_d^0) \,+\, j_0^2\, v_d^0\,.$$

Lemme 8 *Sous les hypothèses de la proposition 3, soit j_0 satisfaisant (3.16) et soit (v_g^0, v_d^0, j_0) une transition de phase 0-admissible. Alors il existe deux surfaces $\Sigma_{g,d} \subset \mathbb{R}^5$ passant par $U_{g,d}^0 \;:=\; {}^t(\, v_{g,d}^0\,,\, 0\,,\, \pi_0\,,\, j_0\,,\, 0\,)$ respectivement, localement paramétrées par (j, ν), telles que, les couples de points fixes, (U_g, U_d), voisins de (U_g^0, U_d^0), reliés par une orbite hétérocline de (3.17) soient de la forme $(U_g(j,\nu), U_d(j,\nu)) \in \Sigma_g \times \Sigma_d$.*

Démonstration. Elle suit de près celle du cas $j_0 = 0$ développée dans [6]. Le cas $j_0 \neq 0$ est utilisé dans [5] mais il n'y est pas rédigé en détail. C'est pourquoi nous le faisons ici.

Les matrices du système (3.17) linéarisé en $U_{g,d}^0$ s'écrivent respectivement:

$$
A_{g,d}^0 \,=\, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (C_{g,d}^0)^2 & 0 & 1 & -2 j_0\, v_{g,d}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,,
$$

où

$$(C_{g,d}^0)^2 \,:=\, -\,\frac{dp}{dv}\,(v_{g,d}^0) \,-\, j_0^2 \,>\, 0\,,$$

d'après (3.4) et (3.5). Les matrices $A_{g,d}^0$ admettent 0 pour valeur propre triple. Par suite le système (3.17) admet des variétés centrales de dimension 3, notées $\mathcal{W}_{g,d}^c$, aux point fixes $U_{g,d}^0$, contenant et donc localement confondues avec les variétés de dimension 3 des points fixes ${}^t(\, v\,,\, 0\,,\, p(v) \,+\, j^2\, v\,,\, j\,,\, \nu\,)$ voisins de $U_{g,d}^0$ respectivement, et d'espaces tangents

$$
T_{U_{g,d}^0} \mathcal{W}_{g,d}^c \,=\, \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\,(C_{g,d}^0)^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \,\oplus\, \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 j_0\, v_{g,d}^0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\oplus\, \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,.
$$

[1] L'idée de considérer un système dynamique étendu est déjà classique pour les profils visqueux [22].

De plus, les matrices $A^0_{g,d}$ admettent chacune une valeur propre positive, $C^0_{g,d}$, et une valeur propre négative, $-C^0_{g,d}$. Donc le système (3.17) admet une variété instable $\mathcal{W}^i_g$, respectivement stable $\mathcal{W}^s_d$, au point U_g, respectivement U_d, de dimension 1 et tangente au vecteur ${}^t(1\,,\, C^0_g\,,\, 0\,,\, 0\,,\, 0\,)$, respectivement ${}^t(1\,,\, -C^0_d\,,\, 0\,,\, 0\,,\, 0\,)$. Par suite, le système (3.17) admet une variété centrale-instable $\mathcal{W}^{ci}_g$ au point U^0_g, et une variété centrale-stable $\mathcal{W}^{cs}_d$ au point U^0_d, de dimension 4, dont les espaces tangents sont respectivement:

$$T_{U^0_g}\mathcal{W}^{ci}_g \;=\; \left(\, {C^0_g}^2\,,\, -\,C^0_g\,,\, 1\,,\, -2j_0\, v^0_g\,,\, 0\,\right)^{\perp}\,,$$

$$T_{U^0_d}\mathcal{W}^{cs}_d \;=\; \left(\, {C^0_d}^2\,,\, C_d\,,\, 1\,,\, -2j_0\, v^0_d\,,\, 0\,\right)^{\perp}\,.$$

L'hypersurface $\mathcal{W}^{ci}_g$ contient en particulier $\mathcal{W}^i_g$, de même que $\mathcal{W}^{cs}_d$ contient $\mathcal{W}^s_d$. Leur intersection contient donc l'orbite Γ_0, décrite par la solution:

$$\xi \;\mapsto\; U_0(\xi) \;:=\; {}^t(\, v_0(\xi)\,,\, {v_0}'(\xi)\,,\, \pi_0\,,\, j_0\,,\, 0\,)\,,$$

reliant U^0_g à U^0_d.

Dans un premier temps, nous allons montrer que ces hypersurfaces sont transverses le long de Γ_0 et que par conséquent leur intersection $\mathcal{M}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^5$ de dimension 3. Pour cela, calculons les espaces tangents à $\mathcal{W}^{ci}_g$ et à $\mathcal{W}^{cs}_d$ en un point de Γ_0. Pour tout $\xi_0 \in \mathbb{R}$, l'espace tangent au point $U_0(\xi_0)$ de Γ_0 à $\mathcal{W}^{ci}_g$ est engendré par les valeurs en ξ_0 des solutions du système linéarisé autour de Γ_0:

$$(3.18)\qquad \begin{cases} \alpha' \;=\; \beta\,, \\[2ex] \beta' \;=\; -\left(\dfrac{dp}{dv}\,(v_0(\xi)) \;+\; j_0^2\right)\,\alpha \;+\; \gamma \;-\; 2\,j_0\, v_0(\xi)\,\delta \;+\; j_0\, {v_0}'(\xi)\,\eta\,, \\[2ex] \gamma' \;=\; 0\,, \\[2ex] \delta' \;=\; 0\,, \\[2ex] \eta' \;=\; 0\,, \end{cases}$$

admettant une limite en $-\infty$ appartenant à $T_{U^0_g}\mathcal{W}^{ci}_g$. Or, on calcule aisément, en utilisant l'équation satisfaite par v_0:

$${v''}_0 \;=\; p(v^0_g) \;+\; j_0^2\, v^0_g \;-\; p(v_0) \;-\; j_0^2\, v_0\,,$$

que les solutions de (3.18) vérifient:

$$(\, {v_0}'\,\beta \;-\; {v_0}''\,\alpha\,)' \;=\; (\, v_0\,\gamma \;-\; j_0\, v_0^2\,\delta\,)' \;+\; j_0\, {{v_0}'}^2\,\eta\,.$$

Par suite, on a:

$$\begin{aligned} T_{U_0(\xi_0)}\mathcal{W}^{ci}_g \;=\;& \{\, {}^t(\,\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma\,,\,\delta\,,\,\eta\,)\,;\;\; {v_0}'(\xi_0)\,\beta \;-\; {v_0}''(\xi_0)\,\alpha \;=\; (\, v_0(\xi_0) \;-\; v^0_g\,)\,\gamma \\ & \qquad -\, j_0\,(\, v_0(\xi_0)^2 \;-\; {v^0_g}^2\,)\,\delta \;+\; j_0 \int_{-\infty}^{\xi_0} {{v_0}'}^2(\xi)\, d\xi \;\;\eta\,\} \;=\; \\ & \{ \quad {}^t(\,\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma\,,\,\delta\,,\,\eta\,)\,;\; \frac{{v_0}'(\xi_0)}{v_0(\xi_0) \;-\; v^0_g}\,\beta \;-\; \frac{{v_0}''(\xi_0)}{v_0(\xi_0) \;-\; v^0_g}\,\alpha \;=\; \gamma \\ & -\, j_0\,(\, v_0(\xi_0) \;+\; v^0_g\,)\,\delta \;+\; j_0\,\frac{1}{v_0(\xi_0) \;-\; v^0_g} \int_{-\infty}^{\xi_0} {{v_0}'}^2(\xi)\, d\xi \;\;\eta\,\}\,. \end{aligned}$$

(A la limite lorsque ξ tend vers $-\infty$, on retrouve bien:

$$T_{U_g^0}\mathcal{W}_g^{ci} = \{ {}^t(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta);\ C_g^0\,\beta - C_g^{0^2}\,\alpha = \gamma - 2\,j_0 v_g^0\,\delta \}.)$$

De façon analogue on a:

$$T_{U_0(\xi_0)}\mathcal{W}_d^{cs} = \{ {}^t(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta);\quad v_0{}'(\xi_0)\,\beta - v_0{}''(\xi_0)\,\alpha = (\,v_0(\xi_0) - v_d^0\,)\,\gamma$$

$$- j_0\,(\,v_0(\xi_0)^2 - v_d^{0^2}\,)\,\delta - j_0 \int_{\xi_0}^{+\infty} v_0{}'(\xi)^2\,d\xi\ \ \eta \}.$$

Par suite, puisque $v_g^0 \neq v_d^0$, les hyperplans $T_{U_0(\xi_0)}\mathcal{W}_g^{ci}$ et $T_{U_0(\xi_0)}\mathcal{W}_d^{cs}$ sont distincts donc transverses. Les variétés $\mathcal{W}_g^{ci}$ et $\mathcal{W}_d^{cs}$ sont donc aussi transverses au point $U_0(\xi_0)$. C'est le cas également pour $\xi_0 = \pm\infty$. L'intersection $\mathcal{M} := \mathcal{W}_g^{ci} \cap \mathcal{W}_d^{cs}$ est donc une sous-variété de dimension 3.

D'autre part, $\mathcal{W}_d^{cs}$ est transverse à $\mathcal{W}_g^c$ en U_g^0. Plus précisément, soit

$$V = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\,C_g^{0^2}\,\alpha + 2j_0\,v_g^0\,\delta \\ \delta \\ \eta \end{pmatrix} \in T_{U_g^0}\mathcal{W}_g^c.$$

Comme

$$T_{U_g^0}\mathcal{W}_d^{cs} = \{ {}^t(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta);\quad 0 = (\,v_g^0 - v_d^0\,)\,\gamma$$

$$- j_0\,(\,v_g^{0^2} - v_d^{0^2}\,)\,\delta - j_0 \int_{-\infty}^{+\infty} v_0{}'(\xi)^2\,d\xi\ \ \eta \},$$

le vecteur V est dans l'hyperplan $T_{U_g^0}\mathcal{W}_d^{cs}$ si et seulement si

$$\alpha = \frac{j_0}{C_g^{0^2}} \left(-\,(\,v_d^0 - v_g^0\,)\,\delta + \frac{1}{v_d^0 - v_g^0} \int_{-\infty}^{+\infty} v_0{}'(\xi)^2\,d\xi\ \ \eta \right).$$

Par suite, $\Sigma_g := \mathcal{W}_d^{cs} \cap \mathcal{W}_g^c = \mathcal{M} \cap \mathcal{W}_g^c$ est une surface au voisinage de U_g^0, paramétrée par (j,ν). Si de plus, $j_0 \neq 0$, alors on a sur Σ_g:

$$v_g(j,\nu) - v_g^0 \sim \frac{j_0}{C_g^{0^2}} \left(-\,(\,v_d^0 - v_g^0\,)\,(\,j - j_0\,) + \frac{\nu}{v_d^0 - v_g^0} \int_{-\infty}^{+\infty} v_0{}'(\xi)^2\,d\xi \right),$$

$$\pi(j,\nu) - \pi_0 \sim j_0 \left((\,v_d^0 + v_g^0\,)\,(\,j - j_0\,) - \frac{\nu}{v_d^0 - v_g^0} \int_{-\infty}^{+\infty} v_0{}'(\xi)^2\,d\xi \right).$$

De façon analogue, on montre que $\Sigma_d := \mathcal{W}_g^{ci} \cap \mathcal{W}_d^c = \mathcal{M} \cap \mathcal{W}_d^c$ est une surface au voisinage de U_d^0, paramétrée par (j,ν), sur laquelle, si $j_0 \neq 0$:

$$v_d(j,\nu) - v_d^0 \sim \frac{j_0}{C_d^{0^2}} \left((\,v_d^0 - v_g^0\,)\,(\,j - j_0\,) + \frac{\nu}{v_d^0 - v_g^0} \int_{-\infty}^{+\infty} v_0{}'(\xi)^2\,d\xi \right).$$

Les points fixes U_g voisins de U_g^0 reliés à des points fixes U_d voisins de U_d^0 par une orbite hétérocline de (3.17) sont bien sûr les éléments de Σ_g, et ils sont reliés à des éléments de Σ_d. $\square$

Remarque 8 *Ici les variétés centrales,* $\mathcal{W}_g^c$ *et* $\mathcal{W}_d^c$*, sont uniques car confondues avec des variétés de points fixes.*

Corollaire 1 *Sous les hypothèses de la proposition 3, soit j_0 satisfaisant (3.16) et soit (v_g^0, v_d^0, j_0) une transition de phase 0-admissible. Alors il existe $\nu_0 > 0$ et des voisinages $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{V}_0$, de j_0, (v_g^0, v_d^0), respectivement, tels que, pour $(j,\nu) \in \mathcal{J}_0 \times [0, \nu_0]$, il existe un unique couple $(v_g, v_d) \in \mathcal{V}_0$ tel que (v_g, v_d, j) soit une transition de phase ν-admissible. De plus, l'ensemble des tels (v_g, v_d) est paramétré par (j,ν), et les applications $(j,\nu) \mapsto v_{g,d}(j,\nu)$, $\pi : (j,\nu) \mapsto p(v_{g,d}(j,\nu)) + j^2 v_{g,d}(j,\nu)$, sont telles que, si $j_0 \neq 0$:*

$$v_g(j,\nu) - v_g^0 \sim \frac{j_0}{C_g^{0\,2}} \left(-(v_d^0 - v_g^0)(j - j_0) + \frac{\nu}{v_d^0 - v_g^0} \int_{-\infty}^{+\infty} v'_0(\xi)^2 \, d\xi \right),$$

$$v_d(j,\nu) - v_d^0 \sim \frac{j_0}{C_d^{0\,2}} \left((v_d^0 - v_g^0)(j - j_0) + \frac{\nu}{v_d^0 - v_g^0} \int_{-\infty}^{+\infty} v'_0(\xi)^2 \, d\xi \right),$$

$$\pi(j,\nu) - \pi_0 \sim j_0 \left((v_d^0 + v_g^0)(j - j_0) - \frac{\nu}{v_d^0 - v_g^0} \int_{-\infty}^{+\infty} v'_0(\xi)^2 \, d\xi \right).$$

Remarque 9

1. *Dans le cas $j_0 = 0$, le calcul que nous avons effectué à l'ordre 1 ne fournit pas le comportement de v_g et v_d au voisinage de $(0,0)$, puisqu'il montre seulement:*

$$\frac{\partial v_{g,d}}{\partial j}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial v_{g,d}}{\partial \nu}(0,0) = 0.$$

   Pour obtenir d'autres informations, il faut faire le calcul à un ordre supérieur. L'ordre 2 suffit, c'est l'objet du travail décrit à la section suivante, qui fournit un résultat de non-unicité au voisinage du palier de Maxwell.

2. *Lorsque $j_0 \neq 0$, on constate que, pour $\nu \geq 0$, les transitions de phase ν-admissibles, (v_g, v_d, j), peuvent être paramétrées par j* ou bien *l'un des états v_g ou v_d. Ceci est très différent du cas des chocs de Lax, qui sont paramétrés par un état* et *le flux j (ou de façon équivalente la vitesse σ).*

3.3 Non-unicité des transitions de phase au voisinage du palier de Maxwell

Ce que nous exposons ici fait suite au Corollaire 1 dans le cas $j_0 = 0$, et a fait l'objet de [6].

Proposition 4 *Soit $p \in \mathcal{C}^2(]b, +\infty[)$ telle que*

1. *il existe $(v_\star, v^\star) \in]b, +\infty[\times]b, +\infty[$, $v_\star < v^\star$, tels que:*

$$p'(v) < 0 \;\; si \;\; b < v < v_\star \;\; ou \;\; v > v^\star, \;\; p'(v) > 0 \;\; si \;\; v_\star < v < v^\star,$$

2. *on ait:*

$$\lim_{v \to b} p(v) = +\infty, \quad \lim_{v \to +\infty} p(v) = 0.$$

Soient $v_m < v_\star$ et $v_M > v_\star$ les points de Maxwell, définis par

$$\int_{v_m}^{v_M} (\bar{p} - p(v))\, dv = 0, \quad \bar{p} = p(v_m) = p(v_M),$$

et soit $\xi \mapsto v(\xi)$ un profil associé. Alors il existe $\nu_0 > 0$ et des voisinages $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{V}_0$, de 0, (v_m, v_M), respectivement, tels que, pour $(j,\nu) \in \mathcal{J}_0 \times [0,\nu_0]$, il existe un unique couple $(v_g(j,\nu), v_d(j,\nu)) \in \mathcal{V}_0$ tel que $(v_g(j,\nu), v_d(j,\nu), j)$ soit une transition de phase ν-admissible. De plus, on a:

$$v_g(j,\nu) - v_m \sim \frac{1}{{C_m}^2}\left(-\frac{1}{2}(v_M - v_m)\, j^2 + \frac{j\,\nu}{v_M - v_m}\int_{-\infty}^{+\infty} v'(\xi)^2\, d\xi\right),$$

$$v_d(j,\nu) - v_M \sim \frac{1}{{C_M}^2}\left(\frac{1}{2}(v_M - v_m)\, j^2 + \frac{j\,\nu}{v_M - v_m}\int_{-\infty}^{+\infty} v'(\xi)^2\, d\xi\right),$$

où

$$C^2_{m,M} := -\frac{dp}{dv}(v_{m,M}).$$

Le comportement de v_g et v_d au voisinage de $(0,0)$ permet de montrer le résultat suivant, de non-unicité des transitions de phase par rapport à l'état dit *métastable*, c'est-à-dire celui situé à l'intérieur des points de Maxwell.

Théorème 9 *Sous les hypothèses et notations de la proposition 4, pour tout $\nu \in]0, \nu_0[$ il existe quatre valeurs v_{min}, v_{max}, v_{Min} et v_{Max} – dépendant de ν – satisfaisant*

$$v_{min} < v_m < v_{max} < v_\star, \; v^\star < v_{Min} < v_M < v_{Max},$$

telles que

- *pour tout $v_g \in [v_m, v_{max}[$ il existe deux couples $(v_d, j) \in [v_M, v_{Max}] \times \mathbb{R}^+$ tels que (v_g, v_d, j) soit une transition de phase ν-admissible,*

- *pour tout $v_d \in]v_{Min}, v_M]$ il existe deux couples $(v_g, j) \in [v_{min}, v_m] \times \mathbb{R}^-$ tels que (v_g, v_d, j) soit une transition de phase ν-admissible.*

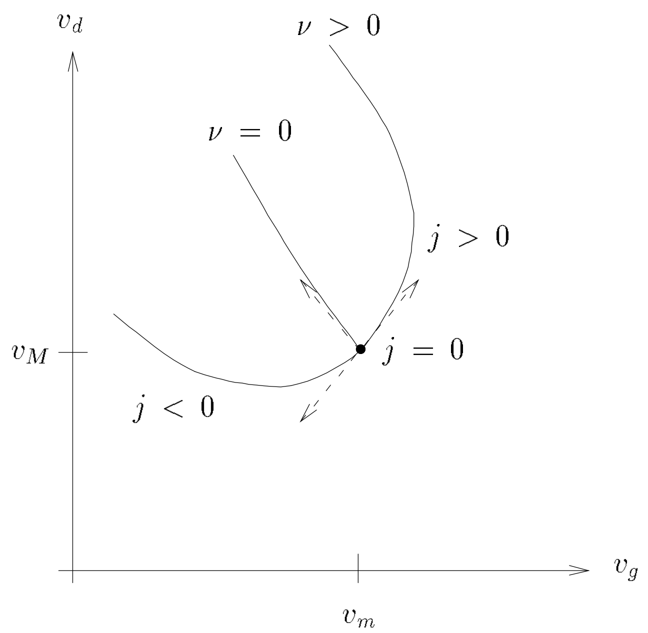

FIG. 3.3 - Transitions de phase admissibles au voisinage du palier de Maxwell.

3.4 La condition de saut supplémentaire ou relation cinétique

On a vu que les transitions de phase réversibles devaient satisfaire la règle des aires égales généralisée (3.14). En tenant compte de la condition de Rankine-Hugoniot (3.10), on peut réécrire la relation (3.14) à l'aide de l'énergie libre spécifique, ε, primitive de $-p$ comme fonction de v. On obtient:

$$\varepsilon_d - \varepsilon_g + \frac{p_d + p_g}{2}(v_d - v_g) = 0 . \tag{3.19}$$

C'est une relation de saut indépendante de la condition de Rankine-Hugoniot. Elle exprime que le taux de dissipation d'entropie:

$$[F] - \sigma [E],$$

associé au couple entropie-flux

$$E = \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho\varepsilon, \; F = (E + p) u,$$

est nul. En effet, en utilisant à nouveau (3.10), on calcule aisément:

$$[F] - \sigma [E] = j f,$$

où:

$$f := \varepsilon_d - \varepsilon_g + \frac{p_d + p_g}{2}(v_d - v_g).$$

Dans le cas plus général de transitions de phase ν-admissibles, $\nu \geq 0$, la relation (3.19) devient:

$$\varepsilon_d - \varepsilon_g + \frac{p_d + p_g}{2}(v_d - v_g) = -\nu j \int_{-\infty}^{+\infty} v'(\xi; j, \nu)^2 \, d\xi , \tag{3.20}$$

où $\xi \mapsto v(\xi; j, \nu)$ est un profil viscocapillaire, solution de (3.11) (3.12) [2]. Ainsi, (3.20) comporte un terme, $\int_{-\infty}^{+\infty} v'(\xi; j, \nu)^2 \, d\xi$, dépendant de la structure de l'interface entre les deux phases. Ce n'est plus une condition de saut "explicite" comme l'était (3.19). Elle est souvent appelée *relation cinétique*, car elle relie le taux de dissipation d'énergie $j f$ à la vitesse σ, ou plutôt ici au flux de masse j, de la transition de phase. De plus, à l'aide du corollaire 1, on montre que f est fonction décroissante de j. (On est ainsi dans une situation comparable à celles considérées dans [1], dans le contexte de l'élasticité, où f est fonction croissante de la vitesse σ.) On a en fait un résultat plus précis, démontré et utilisé dans [5]:

Théorème 10 *Sous les hypothèses de la proposition 3, avec p assez régulière, soit $\mathcal{K}$ un compact inclus dans $]-(-p'(v_1))^{1/2}, 0[$ ou $]0, (-p'(v_1))^{1/2}[$, et soit $\mathcal{R}$ l'une des deux courbes (symétriques l'une de l'autre) décrite par les transitions de phase 0-admissibles (v_g^0, v_d^0, j_0), $j_0 \in \mathcal{K}$. Il existe $\nu_{\mathcal{K}} > 0$, un voisinage $\mathcal{O}$ de $\mathcal{K}$, et un voisinage $\mathcal{A}$ de $\mathcal{R}$, tels que, pour tout $(j, \nu) \in \mathcal{O} \times [0, \nu_{\mathcal{K}}]$, il existe un unique couple*

$$(v_g, v_d) = (v_g(j, \nu), v_d(j, \nu)) \in \mathcal{A},$$

[2]Ceci implique en particulier que ces transitions de phase sont admissibles au sens de la condition d'entropie, puisqu'alors $[F] - \sigma [E] = j f \leq 0$.

tel que (v_g, v_d, j) *soit une transition de phase* ν*-admissible. Soit alors*

$$\begin{aligned} f :\ \mathcal{O}\times[\,0\,,\,\nu_{\mathcal{K}}\,] \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (j,\nu) \qquad &\mapsto \quad f(j,\nu) \,=\, \varepsilon(v_d(j,\nu)) \,-\, \varepsilon(v_g(j,\nu)) \\ &\qquad + \frac{p(v_d(j,\nu)) \,+\, p(v_g(j,\nu))}{2}\,(v_d(j,\nu) \,-\, v_g(j,\nu))\,. \end{aligned}$$

Il existe $\alpha > 0$ *tel que, pour tout* $(j,\nu) \in \mathcal{O}\times]\,0\,,\,\nu_{\mathcal{K}}\,]$*:*

$$\frac{\partial f}{\partial j}\,(j,\nu) \,=\, -\,\nu\,\alpha(j) \,+\, o(\nu)\,,$$

et:

$$\alpha(j) \,\geq\, \alpha \,>\, 0\,.$$

Chapitre 4

Stabilité multidimensionnelle des transitions de phase

Ce chapitre se rapporte aux articles [4] [5].

Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre à la stabilité *multidimensionnelle* des transitions de phase planes étudiées au précédent chapitre. A toute transition de phase admissible (v_g, v_d), de vitesse σ, sont en effet associées des ondes planes:

$$\begin{array}{l} \rho(\vec{x},t) \,=\, \rho_g \text{ and } \vec{u}(\vec{x},t) \,=\, \vec{u_g}\,, \quad \text{if } \vec{x}\cdot\vec{n}-\sigma t \,<\, 0\,, \\ \rho(\vec{x},t) \,=\, \rho_d \text{ and } \vec{u}(\vec{x},t) \,=\, \vec{u_d}\,, \quad \text{if } \vec{x}\cdot\vec{n}-\sigma t \,>\, 0\,, \end{array} \tag{4.1}$$

solutions faibles des équations d'Euler:

$$\begin{array}{l} \partial_t\,\rho \,+\, \nabla\cdot(\rho\,\vec{u}) \,=\, 0\,, \\ \partial_t(\rho\,\vec{u}) \,+\, \nabla\cdot(\rho\,\vec{u}\otimes\vec{u}) \,+\, \nabla\,p(\rho) \,=\, 0\,. \end{array} \tag{4.2}$$

La condition de Rankine-Hugoniot pour (4.1) s'écrit:

$$\begin{array}{l} \rho_l\,(\vec{u}_l\cdot\vec{n}-\sigma) \,=\, \rho_r\,(\vec{u}_r\cdot\vec{n}-\sigma)\,, \\ \rho_l\,(\vec{u}_l\cdot\vec{n}-\sigma)\,\vec{u}_l \,+\, p(v_l)\,\vec{n} \,=\, \rho_r\,(\vec{u}_r\cdot\vec{n}-\sigma)\,\vec{u}_r \,+\, p(v_r)\,\vec{n}\,. \end{array} \tag{4.3}$$

Elle est donc satisfaite dès que:

$$\rho_{g,d} \,=\, 1/v_{g,d}\,,$$

$$\vec{u}_d \,-\, \vec{u}_g \,=\, j\,(\,v_d \,-\, v_g\,)\,\vec{n}\,,$$

$$j \,:=\, \rho_g\,(\vec{u}_g\cdot\vec{n}-\sigma) \,=\, \rho_d\,(\vec{u}_d\cdot\vec{n}-\sigma)\,,$$

$$p(v_g) \,+\, j^2\,v_g \,=\, p(v_d) \,+\, j^2\,v_d\,.$$

Le problème que l'on se pose est celui de la stabilité de (4.1) lorsqu'on perturbe initialement l'interface plane

$$\Sigma(0) \,:=\, \{\,\vec{x}\in\mathbb{R}^d;\ \vec{x}\cdot\vec{n} \,=\, 0\,\}$$

et les états de part et d'autre. Dans ces conditions, subsiste-t-il une solution faible de (4.2), régulière de part et d'autre d'une interface "proche" de

$$\Sigma(t) \,:=\, \{\,\vec{x}\in\mathbb{R}^d;\ \vec{x}\cdot\vec{n} \,=\, \sigma\,t\,\}\,,$$

qui soit une transition de phase admissible en chaque point de l'interface? Il s'agit d'un problème à frontière libre, qui a été étudié avec succès par Majda dans le cas des ondes de choc [21] [20]. On se propose de suivre la même démarche, où l'on tient compte bien sûr de la condition de saut supplémentaire, (3.19) ou (3.20), issue du critère d'admissibilité. Si l'on ne considérait que la condition de Rankine-Hugoniot (4.3), on conclurait en effet immédiatement à l'*instabilité*, même en une dimension d'espace, de (4.1). Ceci est lié au caractère *sous-compressif*, mentionné plus haut, des transitions de phase subsoniques que nous considérons. La condition de saut supplémentaire devrait, comme le met en évidence Freistühler dans [8], permettre de rétablir la stabilité. Le problème majeur que l'on rencontre ici tient à la forme de la condition de saut supplémentaire, qui n'est pas explicite dans le cas dissipatif $\nu > 0$. C'est pourquoi on commencera par le cas des transitions de phase réversibles, pour lequel ce problème ne se pose pas. Cette étude nous permettra ensuite, grâce aux résultats du précédent chapitre, d'étudier le cas des transitions de phase faiblement dissipatives, c'est-à-dire pour lesquelles le paramètre ν est assez petit. (Tous les détails se trouvent dans [6] [5].)

4.1 Stabilité des transitions de phase réversibles

Comme Majda [21], on reformule notre problème à frontière libre en un problème mixte dans un demi-espace fixe. Ce dernier problème est non-standard, car les conditions aux limites, qui proviennent des conditions de saut du problème à frontière libre, contiennent des dérivées de la position de la frontière inconnue. On peut cependant écrire une *condition de Lopatinski* généralisée. Sous forme algébrique, celle-ci demande qu'un certain déterminant, $D(\tau,\eta)$, de taille $d+2$ ($d+1$ dans [21]), dépendant bien sûr de la transition de phase considérée, ainsi que d'une fréquence $\tau \in \mathbb{C}$ et d'un vecteur d'onde $\eta \in \mathbb{R}^{d-1}$, ne s'annule pas lorsque Re $\tau > 0$. En fait, on peut se ramener à un déterminant 4×4, $\Delta(\tau, ||\eta||)$ [1], ne dépendant que de $||\eta|| \in \mathbb{R}$. Ainsi la stabilité en dimension d équivaut à la stabilité en dimension $d = 2$. A priori assez compliqué, le déterminant $\Delta(\tau, ||\eta||)$ se développe aisément et l'on montre que:

1. pour tout $\tau \in \mathbb{C}$ tel que Re $\tau \geq 0$,

$$\Delta(\tau, 0) \neq 0\,,$$

2. il existe une fonction holomorphe, homogène de degré 1, ϕ_1, et une fonction holomorphe, homogène de degré 2, ϕ_2, telles que, pour tout $\tau \in \mathbb{C}$ tel que Re $\tau > 0$, pour tout $\eta \neq 0$,

$$\Delta(\tau, ||\eta||) \;=\; \phi_1(V)\,\phi_2(V)\,, \tag{4.4}$$

   où:

$$V \;:=\; \frac{\tau}{i\,||\eta||}\,.$$

   De plus, ni ϕ_1 ni ϕ_2 n'ont de racine dans le demi-plan

$$\{V \in \mathbb{C}\,;\;\; \mathrm{Im}\; V \;<\; 0\}\,.$$

Ceci montre la stabilité linéarisée *faible* des transitions de phase planes (4.1) réversibles. Afin d'examiner leur stabilité linéarisée forte, qui a lieu si la condition de Lopatinski

[1] Celui-ci n'étant pas très simple à écrire, on pourra se reporter à [5] pour son expression explicite.

uniforme est satisfaite, il faut rechercher des zéros éventuels de Δ, prolongé par continuité aux valeurs de τ telles que $\mathrm{Re}\ \tau \geq 0$. Si la fonction prolongée n'admettait pas de zéro ailleurs qu'en $(0,0)$, on conclurait à la stabilité forte. Ce n'est pas le cas pour les transitions de phase réversibles. En effet, si ϕ_1 ne s'annule pas dans le demi-plan fermé $\{V \in \mathbb{C}\ ;\ \ \mathrm{Im}\ V\ \leq\ 0\}$, en revanche il existe $V_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que:

$$\phi_2(\pm V_0)\ =\ 0\,.$$

Par suite, il existe des *ondes de surface*, solutions du problème mixte linéarisé, se propageant à la vitesse V_0 dans la direction de l'interface et exponentiellement décroissantes transversalement à l'interface. Ceci induit certainement des pertes de dérivées dans les estimations qui seraient utiles à l'étude de la stabilité non-linéaire. On doit donc se contenter du résultat suivant:

Théorème 11 *Les transitions de phase planes (4.1), réversibles, c'est-à-dire telles que:*

$$\int_{v_g}^{v_d} p(v)\,dv\ -\ \frac{p(v_d)\ +\ p(v_g)}{2}\,(v_d\ -\ v_g)\ =\ 0\,,$$

sont faiblement linéairement stables, au sens de la condition de Lopatinski.

Remarque 10

1. *Les cas de stabilité faible peuvent être plus ou moins bons. Le cas le meilleur est celui où la condition de Lopatinski uniforme ne se trouve violée que par des ondes de surface. Et c'est celui dans lequel se trouvent les transitions de phase réversibles.*

2. *La vitesse V_0 des ondes de surface est calculable explicitement en fonction des données.*

3. *Les informations obtenues sur le déterminant de Lopatinski dans le cas réversible, notamment sa forme (4.4), seront essentielles dans l'étude de la stabilité des transitions de phase faiblement dissipatives.*

4.2 Stabilité des transitions de phase faiblement dissipatives

On considère maintenant une transition de phase plane (4.1) telle que (v_g, v_d, j) soit ν-admissible au sens de la définition 11. On veut étudier la stabilité multidimensionnelle de cette transition de phase en suivant la même démarche que précédemment. La difficulté ici réside dans la condition de saut supplémentaire (3.20), qu'il faut linéariser alors qu'elle n'est pas explicite. En fait on montre, à l'aide du théorème 10, qu'il suffit en première approximation, pour ν assez petit, de linéariser l'équation où le terme intégral $\int_{-\infty}^{+\infty} v'(\xi; j, \nu)\,d\xi$ est remplacé par $\int_{-\infty}^{+\infty} v'(\xi; j, 0)\,d\xi$. On obtient ainsi une équation linéarisée faisant intervenir le paramètre $\tilde{\nu}\ :=\ \alpha(j)\,\nu\ +\ o(\nu)$, dont on sait qu'il est positif pour ν assez petit, d'après le théorème 10. On peut alors calculer un déterminant de Lopatinski modifié, $\Delta_{\tilde{\nu}}(\tau, ||\eta||)$, dont on montre que:

1. pour $\tilde{\nu} \geq 0$, pour tout $\tau \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}\ \tau \geq 0$,

$$\Delta_{\tilde{\nu}}(\tau, 0)\ \neq\ 0\,,$$

2. il existe une fonction holomorphe, ψ, telle que, pour tout $\tau \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}\,\tau > 0$, pour tout $\eta \neq 0$,
$$\Delta_{\tilde\nu}(\tau, ||\eta||) \,=\, \phi_1(V)\,\phi_2(V) \,+\, \tilde\nu\,\psi(V)\,,$$
où:
$$V \,=\, \frac{\tau}{i\,||\eta||}\,.$$

Tirant parti d'informations plus précises sur ϕ_i et ψ, on peut montrer à l'aide du théorème de Rouché que, pour $\tilde\nu$ assez petit, le prolongement continu de la fonction $\phi_1\,\phi_2 \,+\, \tilde\nu\,\psi$ ne s'annule pas dans le demi-plan fermé $\{V \in \mathbb{C}\,;\;\; \mathrm{Im}\,V \,\leq\, 0\}$. Ceci assure alors la stabilité linéarisée *uniforme* des transitions de phase faiblement dissipatives. Le résulat plus précis est le suivant:

Théorème 12 *Soit $\mathcal{K}$ un compact inclus dans $]\,-(-p'(v_1))^{1/2}\,,\,0\,[$ ou $]\,0\,,\,(-p'(v_1))^{1/2}\,[$, où v_1 est défini comme dans la proposition 3. Soit $\mathcal{R}$ l'une des deux courbes (symétriques l'une de l'autre) décrite par les transitions de phase 0-admissibles (v_g^0, v_d^0, j_0), $j_0 \in \mathcal{K}$. Il existe $\nu_{\mathcal{K}} \,>\, 0$, un voisinage $\mathcal{O}$ de $\mathcal{K}$, et un voisinage $\mathcal{A}$ de $\mathcal{R}$, tels que, pour tout $(j,\nu) \in \mathcal{O} \times [\,0\,,\,\nu_{\mathcal{K}}\,]$, il existe un unique couple*
$$(v_g, v_d) \,=\, (v_g(j,\nu)\,,\, v_d(j,\nu)) \,\in \mathcal{A}\,,$$
tel que (v_g, v_d, j) soit une transition de phase ν-admissible.

1. *Soit $\mathcal{R}_e$ la courbe des transitions de phase réversibles* expansives *(v_g^0, v_d^0, j_0), $j_0 \in \mathcal{K}$. Alors il existe $\nu_e \,>\, 0$, des voisinages $\mathcal{O}_e$ et $\mathcal{A}_e$ de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{R}_e$, tels que, pour tout $\nu \in (\,0\,,\,\nu_e\,]$, les transitions de phase ν-admissibles $(v_g, v_d, j) \in \mathcal{O}_e \times \mathcal{A}_e$ sont uniformément linéairement stables.*

2. *Soit $\mathcal{R}_c$ la courbe des transitions de phase réversibles* compressives *(v_g^0, v_d^0, j_0), $j_0 \in \mathcal{K}$, telles que*
$$\text{(4.5)} \qquad si\;\; \frac{v_L}{v_V} \,<\, \frac{1}{2} \;\; alors\;\; M_V \,=\, \left(\frac{[\,p\,]/[\,v\,]}{d_v p(v_V)}\right)^{1/2} \,\leq\, \frac{v_L}{v_V}\,,$$
où les indices L, V, signifient liquide et vapeur respectivement. Alors il existe $\nu_c \,>\, 0$, des voisinages $\mathcal{O}_c$ et $\mathcal{A}_c$ de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{R}_c$, tels que, pour tout $\nu \in (\,0\,,\,\nu_c\,]$, les transitions de phase ν-admissibles $(v_g, v_d, j) \in \mathcal{O}_c \times \mathcal{A}_c$ sont uniformément linéairement stables.

Remarque 11 *On constate que les transitions de phase expansives sont inconditionnellement stables, tandis que la stabilité des transitions de phase compressives est soumise à (4.5). Cette condition, bien utile dans les calculs, n'est sans doute pas optimale. Mais, en pratique, il semble qu'elle soit toujours remplie, car les nombres de Mach ont un ordre de grandeur bien plus faible que le taux v_L/v_V (voir [5] pour des exemples).*

Bibliographie

[1] ABEYARATNE (R.) et KNOWLES (J. K.). – Kinetic relations and the propagation of phase boundaries in solids. *Arch. Rational Mech. Anal.*, vol. 114, 1991, pp. 119–154.

[2] BENZONI-GAVAGE (S.). – On a representation formula for B. Temple systems. *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 27, n° 6, 1996, pp. 1503–1519.

[3] BENZONI-GAVAGE (S.). – Semi-discrete shock profiles for hyperbolic systems of conservation laws. *Physica D Nonlinear Analysis*, vol. 115, 1998, pp. 109–123.

[4] BENZONI-GAVAGE (S.). – Stability of multi-dimensional phase transitions in a van der Waals fluid. *Nonlinear Analysis T.M.A.*, vol. 31, n° 1/2, 1998, pp. 243–263.

[5] BENZONI-GAVAGE (S.). – *Stability of subsonic planar phase boundaries in a van der Waals fluid.* – Preprint n° 221, ENS Lyon, 1998.

[6] BENZONI-GAVAGE (S.). – Nonuniqueness of phase transitions near the Maxwell line. *Proc. A.M.S.*, à paraître.

[7] ERICKSEN (J. L.). – Equilibrium of bars. *J. Elasticity*, vol. 5, 1975, pp. 191–201.

[8] FREISTÜHLER (H.). – The persistence of ideal shock waves. *Appl. Math. Lett.*, vol. 7, n° 6, 1994, pp. 7–11.

[9] GOODMAN (J.). – Nonlinear asymptotic stability of viscous shock profiles for conservation laws. *Arch. Rational Mech. Anal.*, vol. 95, 1986, pp. 325–344.

[10] HALE (J.K.) et LUNEL (S.M.V.). – *Introduction to Functional Differential Equations.* – Springer Verlag, 1993.

[11] HEIBIG (A.). – Existence and uniqueness of solutions for some hyperbolic systems of conservation laws. *Arch. Rational Mech. Anal.*, vol. 126, 1994, pp. 79–101.

[12] HEIBIG (A.) et SAHEL (A.). – A method of characteristics for some systems of conservation laws. *SIAM J. Math. Anal.*, à paraître.

[13] HEIBIG (A.) et SERRE (D.). – Etude variationnelle du problème de Riemann. *J. Differential Equations*, vol. 96, 1992, pp. 56–88.

[14] JENNINGS (G.). – Discrete shocks. *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 27, 1974, pp. 25–37.

[15] LAX (P.D.). – Hyperbolic systems of conservation laws: II. *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 10, 1957, pp. 537–566.

[16] LE FLOCH (P.). – Propagating phase boundaries: Formulation of the problem and existence via the Glimm method. *Arch. Rational Mech. Anal.*, vol. 123, 1993, pp. 153–197.

[17] LEVEQUE (R.J.). – *Numerical Methods for Conservation Laws.* – Birkhäuser, 1992, *Lectures in Mathematics.*

[18] LEVEQUE (R.J.) et TEMPLE (B.). – Stability of Godunov's method for a class of 2×2 systems of conservation laws. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 288, 1985, pp. 115–123.

[19] LIU (T.-P.) et YU (S.-H.). – Continuum shock profiles for discrete conservation laws, I. construction. *Comm. Pure Appl. Math.*, à paraître.

[20] MAJDA (A.). – The existence of multi-dimensional shock fronts. *Memoirs Amer. Math. Soc.*, vol. 281, 1983.

[21] MAJDA (A.). – The stability of multi-dimensional shock fronts. *Memoirs Amer. Math. Soc.*, vol. 275, 1983.

[22] MAJDA (A.) et PEGO (R. L.). – Stable viscosity matrices for systems of conservation laws. *J. Differential Equations*, vol. 56, 1985, pp. 229–262.

[23] MAJDA (A.) et RALSTON (J.). – Discrete shock profiles for systems of conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 32, 1979, pp. 445–482.

[24] PEGO (R. L.). – Phase transitions in one-dimensional nonlinear viscoelasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, vol. 97, 1987, pp. 353–394.

[25] SERRE (D.). – Solutions à variation bornée pour certains systèmes hyperboliques de lois de conservation. *J. Differential Equations*, vol. 68, 1987, pp. 137–169.

[26] SERRE (D.). – Temple's fields and integrability of hyperbolic systems of conservation laws. *In : International Conference on Nonlinear PDEs*, éd. par Guangchang (Dong) et Fanghua (Lin). pp. 223–251. – International Academic Publishers.

[27] SERRE (D.). – Remarks on the discrete shock profiles. *Mathemática Contemporânea*, vol. 11, 1996, pp. 153–170.

[28] SHUB (M.). – *Global stability of dynamical systems.* – Springer Verlag, 1987.

[29] SLEMROD (M.). – Admissibility criteria for propagating phase boundaries in a van der Waals fluid. *Arch. Rational Mech. Anal.*, vol. 81, 1983, pp. 301–315.

[30] TEMPLE (B.). – Systems of conservation laws with invariant submanifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 280, 1983, pp. 787–795.

[31] TRUSKINOVSKY (L.). – Kinks versus shocks. *In : Shock Induced Transitions and Phase Structures in General Media*, éd. par Fosdick (R.), Dunn (E.) et Slemrod (M.), pp. 185–227. – Berlin, Springer-Verlag, 1991.

[32] VANDERBAUWHEDE (A.) et IOOSS (G.). – Center manifold theory in infinite dimensions. *Dyn. Reported*, vol. 1, 1992, pp. 125–163.

[33] WEAST (R.C.) et ASTLE (M.J.) (édité par). – *CRC Handbook of Chemistry and Physics.* – Inc. Boca Raton, Florida 33431, CRC Press, 1980.