Modèles multi-classes

Sylvie Benzoni-Gavage
Université Lyon I, benzoni@maply.univ-lyon1.fr
Rinaldo Colombo
Université de Brescia, rinaldo@ing.unibs.it

1 Différents modèles multi-classes

Parmi les différentes manières de prendre en compte l'hétérogénéité du trafic routier, on peut considérer plusieurs, disons n, classes de véhicules, essentiellement caractérisées par leurs performances. Le cas $n = 2$ correspond essentiellement à distinguer les poids lourds des véhicules légers. Outre des vitesses de pointe très différentes, ces classes se distinguent par leur encombrement, la longueur caractéristique d'une classe de véhicules étant clairement reliée à sa concentration maximale lorsqu'elle est seule présente. En tenant compte d'une distance moyenne entre pare-chocs à l'arrêt, on peut dire que la longueur L_i, caractéristique de la classe numéro $i \in \{1, \dots, n\}$, est l'inverse de sa concentration maximale par file. Chaque classe doit naturellement satisfaire la loi de conservation du nombre total de ses véhicules, qui s'exprime à l'aide de sa concentration k_i et de son débit q_i sous la forme

$$\partial_t k_i + \partial_x q_i = 0 .$$

La modélisation multi-voies étant un autre sujet, sur lequel il existe une littérature abondante ([7], [9, 10],[14], etc.) on ne distinguera pas ici les différentes files (on renvoie à [4] pour un exemple de couplage multi-classes / multi-voies, voir aussi le mémoire de thèse [8]). On peut donc comprendre k_i et q_i comme des valeurs moyennes sur le nombre de files. Comme dans le cas du modèle LWR simple ($n = 1$), les lois de conservation nécessitent des lois de fermeture, qui en toute logique sont couplées à travers les vitesses

$$v_i := q_i/k_i ,$$

dites vitesses à l'équilibre.

1.1 Modèles mono-vitesse

Un exemple de modèle multi-classe a été proposé et étudié par Zhang et Jin [18], qui se ramène à des vitesses v_i toutes égales à *une seule vitesse* v, dépendant a priori de toutes les concentrations $k_1, \dots, k_n$. Ce modèle s'écrit ainsi sous la forme

$$\partial_t \mathbf{k} + \partial_x \left(v(\mathbf{k})\, \mathbf{k} \right) = 0 , \quad \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)^t , \tag{1}$$

où $\mathbf{k} \mapsto v(\mathbf{k})$ est une fonction (donnée) à valeurs scalaires. On peut également rencontrer ce modèle en distinguant les usagers de la route selon leur destination (voir [12] pour des exemples de modèles *multi-flots* de ce type). Zhang et Jin ont seulement considéré le cas $n = 2$. Cependant, quel que soit n, le modèle (1) est doté d'une structure mathématique particulière, dite *riche* (voir [15], Chapitre 12). En effet, on montre aisément que (1) implique les équations de transport non-linéaires

$$\partial_t(v(\mathbf{k})) + \lambda(\mathbf{k})\, \partial_x(v(\mathbf{k})) = 0 , \quad \lambda(\mathbf{k}) := v(\mathbf{k}) + \mathbf{d}v(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} ,$$

et

$$\partial_t \left(\frac{k_i}{k_j} \right) + v(\mathbf{k})\, \partial_x \left(\frac{k_i}{k_j} \right) = 0 , \quad \forall\, i,\, j .$$

Dans le langage des systèmes de lois de conservation, cela signifie que le système admet une famille de n *invariants de Riemann forts* indépendants, la vitesse v d'une part et les taux $k_2/k_1, \dots, k_n/k_1$ par exemple. De plus, ces taux sont des invariants de Riemann de type *Temple* (voir [15], Chapitre 13), puisque leurs surfaces de niveau sont des hyperplans. Et, dans le cas particulier où l'invariant de Riemann supplémentaire v est une fonction affine (comme dans le modèle LWR avec le diagramme de Greenshield), le système est entièrement de type Temple.

Les propriétés du système (1) relèvent donc d'une théorie mathématique bien établie. De plus, comme le soulignent Zhang et Jin, c'est par nature un modèle "FIFO" (First In, First Out).

1.2 Modèles multi-vitesses

Il semble plus intéressant, tant du point de vue de la modélisation que de l'analyse mathématique, d'étudier le cas de vitesses v_i distinctes. Pour des fonctions $\mathbf{k} \mapsto v_i(\mathbf{k})$ quelconques, le système

$$\partial_t k_i + \partial_x(k_i\, v_i(\mathbf{k})) = 0$$

n'est qu'un système de lois de conservation général, qui ne se prête guère à une analyse détaillée.

En revanche, on peut raisonnablement supposer que chaque vitesse v_i est fonction du taux d'occupation global $L_1\, k_1 + \cdots + L_n\, k_n$. On obtient alors un modèle multi-classes "isotrope", au sens où il n'y a pas de distinction entre les files, de la forme

$$\partial_t k_i + \partial_x(k_i\, v_i) = 0\,, \quad v_i = v_i\,(L_1\, k_1 + \cdots + L_n\, k_n)\,, \quad i \in \{1, \ldots, n\}\,. \tag{2}$$

En fait, (2) est mathématiquement équivalent à un modèle plus simple, où n'interviennent plus les longueurs L_i. Il suffit de considérer les taux d'occupation partiels $\widetilde{k}_i \stackrel{\text{déf}}{=} L_i\, k_i$ au lieu des concentrations partielles k_i, qui satisfont évidemment le système

$$\partial_t \widetilde{k}_i + \partial_x(\widetilde{k}_i\, v_i) = 0\,, \quad v_i = v_i\,(\widetilde{k}_1 + \cdots + \widetilde{k}_n)\,, \quad i \in \{1, \ldots, n\}\,.$$

Le taux d'occupation global $\widetilde{k}_1 + \cdots + \widetilde{k}_n$ est par définition toujours inférieur à 1. En omettant désormais les tildes, ce qui revient à remplacer toutes les longueurs L_i par 1 dans (2), on note $\kappa = k_1 + \cdots + k_n \in [\,0\,,\,1\,]$, que l'on appelle abusivement concentration totale. Pour des fonctions $\kappa \mapsto v_i(\kappa)$ quelconques, le modèle (2) est encore trop général du point de vue de l'analyse. Nous supposerons l'existence de vitesses maximales V_i (constantes) et d'une fonction ψ, décroissante positive sur l'intervalle $[0, 1]$, caractérisant le comportement des conducteurs, telles que

$$v_i(\kappa) = V_i\, \psi(\kappa)\,, \quad \kappa \in [\,0\,,\,1\,]\,, \qquad i \in \{1, \ldots, n\}\,.$$

Dans ce cas, le modèle (2) revient à

$$\partial_t \mathbf{k} + \partial_x\,(\psi(\kappa)\,\mathbf{V}\,\mathbf{k}) = 0\,, \qquad \mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)^t\,, \quad \kappa = k_1 + \cdots + k_n\,, \tag{3}$$

où $\mathbf{V}$ est la *matrice diagonale* de coefficients $V_1, \ldots, V_n$. Différents choix sont possibles pour la fonction ψ. Une hypothèse assez naturelle, dont on verra qu'elle est importante pour éviter l'apparition de vitesses négatives, demande l'annulation de ψ à concentration maximale, c'est-à-dire $\psi(1) = 0$. Cette hypothèse n'est pas rigoureusement satisfaite par la fonction de Drake,

$$\psi\,(\kappa) = \exp(-(\kappa/\kappa_0)^2/2)\,,$$

considérée par Wong et Wong [17] dans leur étude numérique du modèle (3). Elle l'est encore moins pour la fonction

$$\psi(\kappa) = \frac{1}{\kappa}\,, \tag{4}$$

dont l'intérêt du point de vue de la modélisation du trafic est d'ailleurs discutable. En fait, il peut être utile de remarquer que le modèle (3)-(4) est bien connu dans un autre domaine. Il correspond en effet à l'électrophorèse de n types d'ions de mobilités différentes. Comme (1), le modèle (3)-(4) est riche, et même entièrement de type Temple (voir [15], p. 211-212).

Nous étudierons plus particulièrement le cas de la fonction du diagramme de Greenshield,

$$\psi(\kappa) = 1 - \kappa\,, \tag{5}$$

Le modèle (3)-(5) a l'avantage d'avoir un flux

$$\mathbf{q} : \mathbf{k} \mapsto \psi(\kappa)\,\mathbf{V}\,\mathbf{k}$$

quadratique. Mais il n'est vraisemblablement pas riche (pour $n \geq 3$), et n'a pas de champs de type Temple (si les vitesses V_i sont toutes distinctes) comme on le verra au §3.

1.3 Modèles mixtes

Pour finir cette brève description des modèles multi-classes, il est également intéressant de signaler l'approche hybride proposée par Chanut et Buisson [3] (voir aussi [2]). Leur modèle est en effet multi-vitesses en régime fluide, et mono-vitesse en régime congestionné, c'est-à-dire qu'ils supposent une concentration critique k_c dépendant de $L_1\,k_1 \,+\, L_2\,k_2$ (dans le cas de deux classes) et séparant les deux régimes de sorte que

$$v_i \;=\; \begin{cases} v_i(L_1\,k_1 \,+\, L_2\,k_2)\,, & k_1 \,+\, k_2 \,\leq\, k_c(L_1\,k_1 \,+\, L_2\,k_2)\,, \\[2ex] v(\mathbf{k})\,, & k_1 \,+\, k_2 \,>\, k_c(L_1\,k_1 \,+\, L_2\,k_2)\,. \end{cases}$$

2 Analyse des modèles du type (3)

2.1 Vitesses caractéristiques

La première question à se poser concernant un système de lois de conservation du premier ordre[1] est celle de son *hyperbolicité*. Cette propriété signifie grosso modo que le système propage l'information à vitesse finie. Plus précisément, l'hyperbolicité demande que la matrice jacobienne

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}) \;=\; \mathbf{dq}(\mathbf{k})\,, \quad \text{où } \mathbf{q} \;=\; (q_1, \ldots, q_n)^t\,,$$

soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$, avec des valeurs propres et des matrices de passage uniformément bornées sur tous les états possibles $\mathbf{k}$ du trafic, en l'occurrence sur le simplexe

$$\mathcal{S}_n \;=\; \{\, \mathbf{k} \;=\; (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n\,;\; k_i \geq 0 \;\text{ et }\; \kappa \;=\; k_1 + \cdots + k_n \leq 1\,\}\,.$$

Pour le flux

$$\mathbf{q} \,:\, \mathbf{k} \,\mapsto\, \psi(\kappa)\,\mathbf{V}\,\mathbf{k}$$

qui nous intéresse, on va voir que l'hyperbolicité est mise en défaut sur des parties du bord de $\mathcal{S}_n$, mais qu'elle est satisfaite sur tout compact intérieur à $\mathcal{S}_n$, et plus exactement sur tout compact de

$$\mathcal{S}_n^* \;:=\; \{\, \mathbf{k} \;=\; (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n\,;\; k_i > 0 \;\text{ et }\; \kappa \;=\; k_1 + \cdots + k_n \leq 1\,\}\,.$$

En effet, la matrice jacobienne s'écrit

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}) \;=\; \psi(\kappa)\,\mathbf{V} \;+\; \psi'(\kappa)\,\mathbf{V}\,\mathbf{k}\,\mathbf{1}_n\,,$$

où l'on rappelle que $\mathbf{V}$ est la *matrice diagonale* de coefficients $V_1, \ldots, V_n$, et l'on a introduit (par commodité) le *vecteur ligne* à n composantes

$$\mathbf{1}_n \;:=\; (1, \ldots, 1)\,.$$

En général, et en tous cas pour $n \,\geq\, 5$, on n'a pas d'expression explicite des valeurs propres de $\mathbf{A}(\mathbf{k})$, même avec la fonction très simple (5). Un moyen détourné pour étudier l'hyperbolicité est de chercher à *symétriser* le système (3). Il s'avère que c'est une opération très facile, du moins dans $\mathcal{S}_n^*$. Car, en notant $\mathbf{\Sigma}$ la *matrice diagonale* de coefficients $\sqrt{k_1 V_1}, \ldots, \sqrt{k_n V_n}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ le vecteur ligne

$$\boldsymbol{\sigma} \;=\; (\sqrt{k_1 V_1}, \ldots, \sqrt{k_n V_n})\,,$$

on voit que

$$\mathbf{\Sigma}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{\Sigma} \;=\; \psi\,\mathbf{V} \;+\; \psi'\,\boldsymbol{\sigma}^t\boldsymbol{\sigma}$$

est symétrique, et donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$, dans une base orthonormée. Par similitude, la matrice $\mathbf{A}$ est donc aussi diagonalisable sur $\mathbb{R}$, avec des valeurs propres et des matrices de passage uniformément bornées sur tout compact de $\mathcal{S}_n^*$. Attention, il est impossible d'appliquer ce raisonnement aux compacts de $\mathcal{S}_n$, puisque la matrice $\mathbf{\Sigma}^{-1}$ diverge sur les bords du type $\{\, k_i \;=\; 0\,\}$. On verra plus loin qu'il y a des points du bord de $\mathcal{S}_n$ où $\mathbf{A}$ n'est

[1] on fait ici référence au nombre de dérivations en espace, et non au nombre d'équations ; que le lecteur habitué à la distinction entre les modèles du premier ordre et ceux du second ordre ne soit pas perturbé par cette terminologie.

pas diagonalisable. Cependant, on montre assez facilement que les valeurs propres de $\mathbf{A}$ restent réelles y compris au bord de $\mathcal{S}_n$. En effet, lorsqu'un des classes est absente, par exemple lorsque $k_n = 0$, on a

$$\mathbf{A}_n = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \psi' \, k_1 \, V_1 \\ & \mathbf{A}_{n-1} & & \vdots \\ & & & \psi' \, k_{n-1} \, V_{n-1} \\ \hline 0 & \dots & 0 & \psi \, V_n \end{array}\right),$$

où $\mathbf{A}_n$ (resp. $\mathbf{A}_{n-1}$) désigne la matrice jacobienne du modèle à n (resp. $(n-1)$) classes. Donc, sur le bord $\{ k_n = 0 \}$, le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}_n$ est le produit de celui de $\mathbf{A}_{n-1}$ par $(X - \psi \, V_n)$. Un rapide raisonnement par récurrence montre alors que les valeurs propres de $\mathbf{A}_n$ sont toutes réelles dans $\mathcal{S}_n$. De plus, on a une estimation grossière de ces valeurs propres, grâce à la majoration du rayon spectral (maximum du module des valeurs propres) par toute norme matricielle subordonnée à une norme dans $\mathbb{R}^n$. En choisissant par exemple la norme subordonnée à la norme ℓ^1 dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$\|\mathbf{A}\|_1 := \sup_j \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}| \leq \max_j V_j \max_{\kappa \in [0,1]} \left(\psi(\kappa) + |\psi'(\kappa)| \, \kappa \right).$$

Noter que cette majoration est indépendante de n, pourvu que les vitesses libres V_i soient majorées par une vitesse maximale finie. On peut même comparer les valeurs propres de $\mathbf{A}$ aux vitesses à l'équilibre v_i. Il semble en effet important que l'information ne se propage pas plus vite que les plus rapides des véhicules. Une remarque élémentaire est la suivante. À la limite lorsque $\mathbf{k}$ tend vers 0, $\mathbf{A}$ tend vers la matrice diagonale $\psi(0) \, \mathbf{V}$, pourvu que ψ soit Lipschitzienne en 0. En supposant (sans perte de généralité), $\psi(0) = 1$, on retrouve donc comme valeurs propres les vitesses libres V_i. De plus, en utilisant un peu de théorie des matrices (voir [1]), on peut montrer la

Proposition 2.1. *Soient $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de $\mathbf{A}$. En supposant $V_n < \cdots < V_1$, $\psi(0) = 1$ et $\psi'(\kappa) < 0$ pour tout $\kappa \in [0, 1]$, on a*

$$\lambda_n(\mathbf{k}) \leq v_1(\kappa) \quad \textit{et} \quad \lambda_1(\mathbf{k}) \leq v_n(\kappa)$$

pour tout $\mathbf{k} \in \mathcal{S}_n$.

2.2 Invariance du domaine

Une autre propriété importante que l'on attend du modèle (3) est l'*invariance* du domaine $\mathcal{S}_n$, afin de conserver des concentrations k_i et des vitesses v_i positives ou nulles.

D'après les travaux de Hoff [6], on peut formuler une condition nécessaire très simple pour l'invariance du domaine $\mathcal{S}_n$. Quel que soit $\mathbf{k}$ sur le bord de $\mathcal{S}_n$, la normale à $\partial\mathcal{S}_n$ en ce point (vue comme un vecteur ligne) doit être un vecteur propre à gauche de $\mathbf{A}(\mathbf{k})$. D'après la décomposition de $\mathbf{A}$ que l'on a déjà observée lorsqu'une des classes est absente, cette condition est bien satisfaite le long des bords $\{ k_i = 0 \}$. Quant au bord correspondant aux concentrations maximales, $\{ \kappa = 1 \}$, sa normale est $\mathbf{1}_n$. Or

$$\mathbf{1}_n \, \mathbf{A} = \psi(\kappa) \, \mathbf{1}_n \, \mathbf{V} + \psi'(\kappa) \, (\mathbf{1}_n \, \mathbf{V} \, \mathbf{k}) \, \mathbf{1}_n \in \psi(\kappa) \, \mathbf{1}_n \, \mathbf{V} + \mathbb{R} \, \mathbf{1}_n .$$

Si au moins deux vitesses V_i sont différentes, le vecteur ligne $\mathbf{1}_n \, \mathbf{V}$ n'est *pas colinéaire* à $\mathbf{1}_n$. Donc, demander la condition de Hoff

$$\mathbf{1}_n \, \mathbf{A} \parallel \mathbf{1}_n$$

équivaut à imposer $\psi(1) = 0$.

Rien ne prouve que ce soit une condition suffisante, car les hypothèses faites par Hoff (stricte hyperbolicité du système et véritable non-linéarité des champs) ne sont pas vérifiées au bord du domaine $\mathcal{S}_n$ (voir §3.1). Cependant, l'étude des courbes de Lax pour la fonction particulière (5) (voir §3.2) montre bien l'invariance de $\mathcal{S}_2$ pour le problème de Riemann associè au modèle (3)-(5). De plus, diverses simulations numériques avec $n \geq 3$ ont été effectuées et n'ont révélé aucune anomalie : les concentrations restent dans l'intervalle $[0, 1]$ et les vitesses restent positives ou nulles.

2.3 Ondes de choc

Les systèmes de lois de conservation ont la particularité d'admettre des solutions discontinues, se formant à partir de conditions initiales tout à fait régulières. Dans le cas du modèle LWR ($n = 1$), c'est un fait bien connu : la dispersion d'un peloton initial même très régulier fait apparaître une discontinuité. Généralement, on admet plutôt des flux $k \mapsto k\,\psi(k)$ concaves (comme dans le diagramme de Greenshield où $\psi(k) = 1 - k$), de sorte que seules les discontinuités croissantes sont admissibles. Elles sont situées à l'arrière du peloton dans l'exemple précédent (voir [16], p. 70). Dans le langage la dynamique des gaz, on dirait que ce sont des discontinuités *compressives*, puisque les véhicules rencontrant ces discontinuités voient la densité s'accroître au passage. En cas de perte de concavité, comme avec la fonction de Drake, on pourrait admettre des discontinuités décroissantes, pourvu qu'elles satisfassent le *critère d'Oleinik* (le graphe du flux doit être en dessous de sa corde entre les deux états). De façon générale, on appelle *choc* une discontinuité admissible, à condition de s'accorder sur ce que signifie admissible.

Dans le cas d'un système ($n \geq 2$), la question de l'admissibilité des discontinuités est délicate. Un critère minimal est lié à la notion d'*entropie*. En fait, il s'agît d'entropie mathématique, définie par Lax [11] comme suit, par une certaine analogie avec la dynamique des gaz. Une fonction $E : \mathbf{k} \mapsto E(\mathbf{k}) \in \mathbb{R}$ est une *entropie* du système (3) si et seulement s'il existe une autre fonction, appelée *flux d'entropie* telle que toute solution *régulière* de (3) satisfasse la loi de conservation supplémentaire

$$\partial_t\, E(\mathbf{k}) + \partial_x F(\mathbf{k}) = 0\,.$$

En dynamique des gaz, l'entropie physique par unité de volume est une entropie mathématique. Dans le cas du trafic, il ne semble pas y avoir d'entropie "naturelle". Toutefois, on en trouve une facilement en reprenant notre "symétriseur", c'est-à-dire en fait la matrice $\mathbf{\Sigma}^{-2}$ du §2.1. Habituellement, par exemple en dynamique des gaz, on connaît une entropie et on en déduit un symétriseur. Ici, c'est la démarche inverse. On reconnaît dans

$$\mathbf{\Sigma}^{-2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1 V_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{k_n V_n} \end{pmatrix}$$

la *Hessienne* $\mathbf{d}^2 E$ de l'application

$$E : \mathbf{k} \mapsto E(\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^{n} (\, k_i \ln k_i - k_i\,)/V_i\,.$$

Et on *vérifie* que E est une entropie, de flux associé

$$F : \mathbf{k} \mapsto F(\mathbf{k}) = \psi(\kappa) \sum_{i=1}^{n} (\, k_i \ln k_i\,) - \Psi(\kappa)\,,$$

où Ψ est une primitive de ψ. Bien sûr, par construction, E est une fonction conxeve (sa Hessienne étant une matrice positive). Et c'est important dans le *critère d'entropie de Lax*. Celui-ci demande en effet que pour toute entropie *convexe* E, de flux F, les solutions faibles satisfassent

$$\partial_t\, E(\mathbf{k}) + \partial_x F(\mathbf{k}) \leq 0$$

au sens des distributions. Pour une discontinuité entre deux états $\mathbf{k}_-$ et $\mathbf{k}_+$, de vitesse s, satisfaisant la condition de Rankine-Hugoniot

$$\mathbf{q}(\mathbf{k}_+) - \mathbf{q}(\mathbf{k}_-) = s\,(\,\mathbf{k}_+ - \mathbf{k}_-\,)\,,$$

cela revient à l'inégalité

$$s\,(\,E(\mathbf{k}_+) - E(\mathbf{k}_-)\,) \geq F(\mathbf{k}_+) - F(\mathbf{k}_-)\,.$$

En dynamique des gaz, cette inégalité appliquée à l'entropie physique volumique demande simplement l'accroissement de l'entropie à travers la discontinuité, ce qui n'est rien d'autre que le second principe de la thermodynamique. Cette inégalité est-elle significative pour le modèle de trafic (3) ? Autrement dit, obtient-on comme discontinuités admissibles celles auxquelles on s'attend, essentiellement celles situées à l'arrière de "bouchons", où la concentration maximale augmente ? La réponse dépend, comme dans le cas $n = 1$, de la "concavité" du flux. En fait, pour un système, la notion correspondant à la concavité est celle de la *véritable non-linéarité* des champs caractéristiques. Et c'est une propriété difficile à vérifier, voire impossible si l'on n'a pas d'expression explicite des valeurs propres. On peut toutefois contourner la difficulté dans le cas particulier d'un flux quadratique, c'est ce que nous verrons au §3.1, pour le système 2×2. Quant à l'admissibilité des discontinuités, on peut effectivement montrer, pour le flux quadratique du modèle (3)-(5), qu'elle équivaut à l'augmentation de la concentration maximale. Un petit calcul à base de formules de Taylor donne en effet (voir [1], Proposition 2.4)

$$s\,(\,E(\mathbf{k}_+) - E(\mathbf{k}_-)\,) - (\,F(\mathbf{k}_+) - F(\mathbf{k}_-)\,) \;=\; \frac{1}{4}\,(\,\kappa_+ - \kappa_-\,)\int_{-1}^{1}\int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\theta^2\,(k_i^+ \,-\, k_i^-)^2}{(1\,+\,s\,\theta)\,k_i^+ \,+\,(1\,-\,s\,\theta)\,k_i^-}\,ds\,d\theta\,.$$

3 Le modèle quadratique à deux classes

On va maintenant se concentrer sur le modèle (3)-(5) avec $n = 2$, dont on peut dire beaucoup plus de choses, d'une part parce que son flux est quadratique et d'autre part parce l'"espace" des états du trafic est plan.

3.1 Nature des champs caractéristiques

Tout d'abord, voyons si cette propriété de véritable non-linéarité, importante dans la résolution du *problème de Riemann* notamment, est vérifiée.

Définition 3.1. *Soit λ une valeur propre de $\mathbf{A}$, de vecteur propre (à droite) associé $\mathbf{r}$. On dit que le champ caractéristique correspondant est* vraiment non-linéaire *si et seulement si la dérivée de λ dans la direction $\mathbf{r}$ ne s'annule pas, c'est-à-dire si*

$$\mathbf{d}\lambda(\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}(\mathbf{k}) \;\neq\; 0\,,\quad \forall \mathbf{k} \in \mathcal{S}_2\,.$$

Bien que la matrice $\mathbf{A}$ dépende de façon très simple de $\mathbf{k}$ (c'est ici une fonction affine), l'expression de ses valeurs propres ne l'est pas tellement. On trouve en effet

$$\lambda_1 \;=\; \frac{1}{2}\left(\beta_1 + \beta_2 - \sqrt{(\beta_1-\beta_2)^2 \,+\, 4\,\alpha_1\,\alpha_2}\right)\,,\;\lambda_2 \;:=\; \frac{1}{2}\left(\beta_1 + \beta_2 + \sqrt{(\beta_1-\beta_2)^2 \,+\, 4\,\alpha_1\,\alpha_2}\right)$$

où l'on a introduit par commodité les notations

$$\alpha_i \;:=\; -\,V_i\,k_i\psi'\,,\quad \beta_i \;:=\; V_i\,(\psi \,+\, k_i\psi')\,,$$

qui se réduisent pour la fonction (5) à

$$\alpha_i \;=\; k_i\,V_i\,,\quad \beta_i \;=\; v_i \,-\, \alpha_i\,.$$

On voit immédiatement que ces valeurs propres sont distinctes (on dit alors que le système est *strictement hyperbolique*) si et seulement si

$$k_1\,k_2 \neq 0 \quad \text{ou} \quad \beta_1 \neq \beta_2\,.$$

C'est le cas en particulier dans $\mathcal{S}_2^*$. De plus, si $k_i \;=\; 0$, l'égalité $\beta_i \;=\; \beta_j$ équivaut à

$$V_j \,-\, V_i \;=\; (\,2\,V_j \,-\, V_i\,)\,k_j\,.$$

Supposons par exemple $V_2 \,<\, V_1$. On voit que

$$k_i \;=\; 0\,,\quad \beta_i \;=\; \beta_j\,,\quad \text{et } k_j \;\in\; [\,0\,,\,1\,]$$

n'est possible que pour $j = 1$, $i = 2$. On trouve donc un seul point où les valeurs propres λ_1 et λ_2 coïncident, et il appartient à l'axe des véhicules rapides, à savoir :

$$\mathbf{k}_o \;:=\; \begin{pmatrix} \dfrac{V_1 \,-\, V_2}{2\,V_1 \,-\, V_2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

En ce point, la matrice $\mathbf{A}$ est triangulaire supérieure :

$$\mathbf{A} \;=\; \begin{pmatrix} v_2 & -\,\alpha_1 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}\,,$$

avec $\alpha_1 \neq 0$, donc pas diagonalisable. Cela signifie que pour $V_1 > V_2$, le système (3)-(5) avec $n = 2$ n'est *pas hyperbolique* au point $\mathbf{k}_o$ défini ci-dessus ! Mais l'hyperbolicité (et même la stricte hyperbolicité) a lieu partout ailleurs dans $\mathcal{S}_2$. On verra que le point singulier $\mathbf{k}_o$, dit *ombilical* par référence à l'allure des courbes de Lax autour de lui, bien qu'à l'origine de phénomènes non-standards (en liaison avec la perte d'hyperbolicité en $\mathbf{k}_o$, on trouve des chocs *surcompressifs*, voir Proposition 3.2), n'occasionne pas de problèmes dans les simulations numériques. En dehors du point $\mathbf{k}_o$, un choix possible de vecteurs propres est

$$\mathbf{r}_1 := \begin{pmatrix} \lambda_1 - \beta_2 - \alpha_1 \\ \lambda_1 - \beta_1 - \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 := \begin{pmatrix} -\lambda_2 + \beta_2 - \alpha_1 \\ \lambda_2 - \beta_1 + \alpha_2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

On pourrait adopter des expressions plus simples, mais elles ne seraient pas valides partout. Le choix (6) définit des champs de vecteurs réguliers dans $\mathcal{S}_2 \backslash \{ \mathbf{k}_o \}$, car les composantes de chacun de ces vecteurs $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$ ne peuvent s'annuler simultanément. On voit même facilement[2] que les deux composantes de $\mathbf{r}_1$ sont toujours négatives ou nulles, tandis que la première composante de $\mathbf{r}_2$ est négative ou nulle et la seconde est positive ou nulle, ce qui implique en particulier la monotonie des courbes intégrales de ces champs de vecteurs. On peut de plus démontrer que les courbes intégrales des champs de vecteurs r_1 et r_2 ont leur concavité tournée vers le bas, sauf celles qui sont rectilignes et coïncident en fait avec des parties du bord de $\mathcal{S}_2$. Cela montre que les champs caractéristiques ne sont *pas de type Temple*.

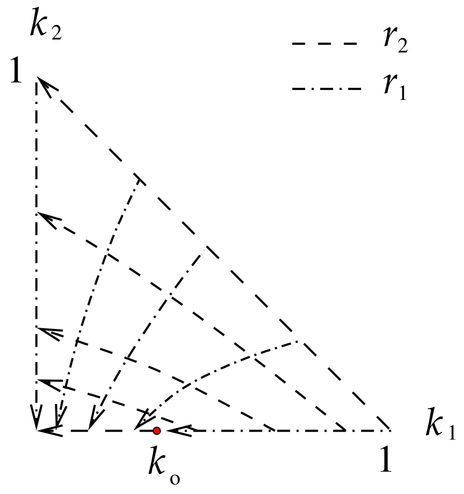

Figure 1: Allure des courbes intégrales des champs de vecteurs r_1 et r_2

.

Pour revenir à la nature des champs caractéristiques, à cause des racines carrées, les différentielles de λ_1 et λ_2 sont assez peu maniables. En revanche, on peut utiliser une remarque qui est habituellement utilisée dans l'autre sens (encore une fois !). Elle utilise des vecteurs propres à gauche $\boldsymbol{\ell}_i$, qui sont par définition des vecteurs lignes tels que

$$\boldsymbol{\ell}_i \, \mathbf{A} = \lambda_i \, \boldsymbol{\ell}_i \, .$$

On peut montrer que, là où le système est strictement hyperbolique, la véritable non-linéarité des champs équivaut à

$$\boldsymbol{\ell}_i(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{d}^2\mathbf{q}(\mathbf{k}) \cdot (\, \mathbf{r}_i(\mathbf{k}), \mathbf{r}_i(\mathbf{k}) \,) \neq 0 \, .$$

Or, puisque le flux $\mathbf{q}$ est quadratique, sa Hessienne $\mathbf{Q} := \mathbf{d}^2\mathbf{q}$ est constante. Une autre remarque, spécifique au cas $n = 2$ mais *indépendante de la fonction* ψ, concerne le choix des vecteurs propres à gauche. En dehors du point ombilical, on peut en effet adopter le choix très simple

$$\boldsymbol{\ell}_1 = (\, \lambda_1 - v_2 \, , \, \lambda_1 - v_1 \,) \, , \quad \boldsymbol{\ell}_2 = (\, \lambda_2 - v_2 \, , \, \lambda_2 - v_1 \,) \, .$$

Ainsi, la véritable non-linéarité du champ numéro i dans $\mathcal{S}_2 \backslash \{ \mathbf{k}_o \}$, équivaut à ce que le vecteur propre $\mathbf{r}_i$ ne soit *pas un vecteur isotrope* de la forme quadratique

$$f_i := (\, \lambda_i - v_2 \, , \, \lambda_i - v_1 \,) \cdot \mathbf{Q} \, .$$

[2]Remarquer les inégalités élémentaires $\lambda_1 \leq \min\{\beta_1, \beta_2\}$ et $\lambda_2 \geq \max\{\beta_1, \beta_2\}$ dans $\mathcal{S}_2$.

Quelques remarques élémentaires, et notamment les inégalités

$$\lambda_1 - v_{1,2} \leq 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 - v_1 \leq 0 \leq \lambda_2 - v_2 \,,$$

qui ne sont qu'un petit raffinement de celles de la proposition 2.1, permettent de montrer plus précisément la

Proposition 3.1. *Le modèle* (3)-(5) *avec* $n = 2$*,* $V_2 < V_1$*,* $\psi(0) = 1$ *et* $\psi'(\kappa) < 0$ *pour tout* $\kappa \in [0\,,\,1]$*, a ses deux champs caractéristiques vraiment non-linéaires dans* $\mathcal{S}_2 \backslash \{\, \mathbf{k}_o \,\}$*. De plus, avec le choix de vecteurs propres* (6)*, on a*

$$\mathbf{d}\lambda_1(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_1(\mathbf{k}) > 0\,, \quad \mathbf{d}\lambda_2(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_2(\mathbf{k}) > 0\,, \quad \forall \mathbf{k} \neq \mathbf{k}_o\,;\; k_i \geq 0\,, \kappa < 1\,,$$

et

$$\mathbf{d}\lambda_1(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_1(\mathbf{k}) > 0 \quad \textit{mais} \quad \mathbf{d}\lambda_2(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_2(\mathbf{k}) = 0\,, \quad \forall \mathbf{k}\,;\; k_i > 0\,, \kappa = 1\,.$$

On renvoie à [1], §4, pour la preuve détaillée.

3.2 Géométrie des courbes de Lax

Dans le but de résoudre le problème de Riemann, il est important de connaître les *courbes de Lax*, qui sont composées des *courbes de détente* et des *courbes de choc*.

Définition 3.2. *Soit* $j = 1$ *ou* 2*. La courbe de* j*-détente passant par un point* $\underline{\mathbf{k}} \in \mathcal{S}_2$ *est la portion de la courbe intégrale de* r_j *passant par* $\underline{\mathbf{k}}$ *où* $\lambda_j > \lambda_j(\underline{\mathbf{k}})$*.*

D'après la proposition 3.1, on connaît précisément l'orientation des courbes de détente. On notera $\mathcal{D}_j(\underline{\mathbf{k}})$ la courbe de j-détente passant par $\underline{\mathbf{k}}$. Il y a bien sûr un cas dégénéré : pour $\underline{\kappa} = 1$, λ_2 est constante sur la courbe intégrale de r_2, qui coïncide avec le bord $\{\, \kappa = 1 \,\}$. Par un léger abus on définit quand même $\mathcal{D}_2(\underline{\mathbf{k}}) = \{\, \kappa = 1 \,\}$.

Quant aux courbes de choc, elles sont obtenues en ne conservant que les discontinuités admissibles satisfaisant la condition de Rankine-Hugoniot. D'après ce qu'on a vu au §2.3, les discontinuités admissibles sont celles pour lesquelles la concentration maximale augmente d'amont en aval.

Définition 3.3. *Soit* $j = 1$ *ou* 2*. La courbe de* j*-choc passant par un point* $\underline{\mathbf{k}} \in \mathcal{S}_2$ *est la portion de l'*ensemble de Hugoniot

$$\mathcal{H}(\underline{\mathbf{k}}) := \{\, \mathbf{k} \in \mathcal{S}_2\,;\, \exists s \in \mathbb{R}\,;\, \mathbf{q}(\mathbf{k}) - \mathbf{q}(\underline{\mathbf{k}}) = s\,(\,\mathbf{k} - \underline{\mathbf{k}}\,)\,\}$$

où $\kappa > \underline{\kappa}$*, et qui est tangente à* $\mathbf{r}_j$ *en* $\underline{\mathbf{k}}$*.*

Cette définition se justifie par le fait que l'ensemble de Hugoniot $\mathcal{H}(\underline{\mathbf{k}})$ est, au moins localement, la réunion de deux courbes, chacune étant tangente à l'un des vecteurs propres r_j en $\underline{\mathbf{k}}$. C'est un fait général. On s'en convainc d'autant plus aisément sur un modèle quadratique. Puisque l'application $\mathbf{k} \mapsto \mathbf{A}(\mathbf{k})$ est affine on a, quels que soient $\mathbf{k}$ et $\underline{\mathbf{k}}$,

$$\mathbf{q}(\mathbf{k}) - \mathbf{q}(\underline{\mathbf{k}}) = \mathbf{A}\left(\frac{\mathbf{k}+\underline{\mathbf{k}}}{2}\right)(\mathbf{k} - \underline{\mathbf{k}})\,.$$

(On peut en particulier voir la matrice $\mathbf{A}\left(\frac{\mathbf{k}+\underline{\mathbf{k}}}{2}\right)$ comme une *matrice de Roe*; concernant l'intérêt des matrices de Roe, voir par exemple [5], p. 196–204.) Par suite, $\mathbf{k}$ appartient à $\mathcal{H}(\underline{\mathbf{k}})$ si et seulement si

$$\mathbf{k} - \underline{\mathbf{k}} \;\|\; \mathbf{r}_j\left(\frac{\mathbf{k}+\underline{\mathbf{k}}}{2}\right)$$

pour $j = 1$ ou 2, et dans ce cas la vitesse s correspondante est

$$s = \lambda_j\left(\frac{\mathbf{k}+\underline{\mathbf{k}}}{2}\right)\,.$$

On peut même ici préciser la nature globale de l'ensemble $\mathcal{H}(\underline{\mathbf{k}})$: c'est une courbe algébrique de degré 3, ayant un point double non dégénéré en $\underline{\mathbf{k}}$. On appelle $\mathcal{H}_j(\underline{\mathbf{k}})$ la "branche" de $\mathcal{H}(\underline{\mathbf{k}})$ tangente à $r_j(\underline{\mathbf{k}})$ en ce point, et on ne retient finalement que la partie admissible ($\kappa \geq \underline{\kappa}$) de chacune de ces branches, ce qui donne $\mathcal{C}_j(\underline{\mathbf{k}})$, la courbe de j-choc. En fait, on montre que lorsque $\underline{\mathbf{k}}$ appartient au bord de $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{H}(\underline{\mathbf{k}})$ est *réductible* : elle est la réunion d'une *droite* (la droite du bord de $\mathcal{S}_2$ où se trouve $\underline{\mathbf{k}}$) et d'une *hyperbole*. On peut de plus montrer dans chaque cas ($k_1 = 0$, $k_2 = 0$ ou $k_1 + k_2 = 1$) que l'une des composantes connexes de l'hyperbole n'intersecte pas $\mathcal{S}_2$ (voir [1], Proposition 4.2). Ceci permet en particulier de définir globalement les ensembles $\mathcal{C}_j(\underline{\mathbf{k}})$ issus du bord de $\mathcal{S}_2$. On a représenté graphiquement les différents cas (Figures 2, 3, 4), en traçant les courbes de choc "rétrogrades"

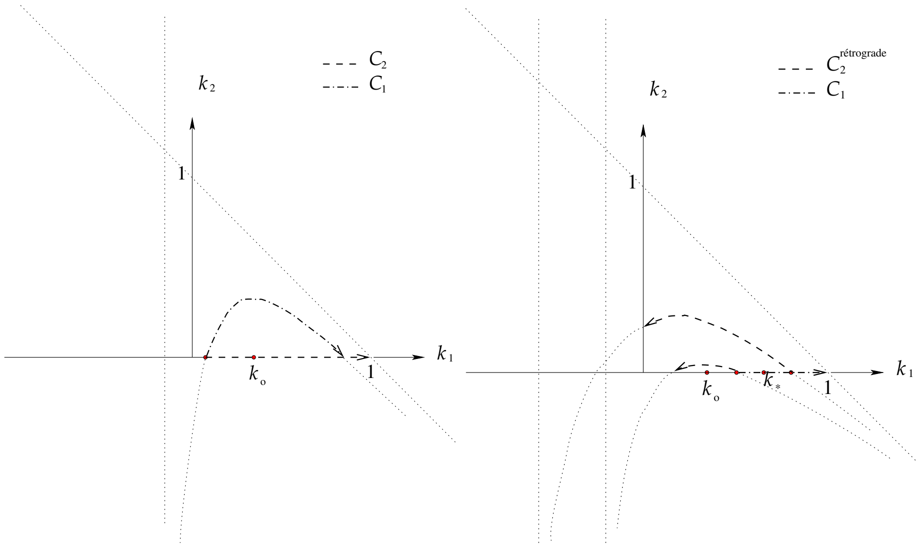

Figure 2: Allure des courbes de choc issues de l'axe des véhicules rapides.

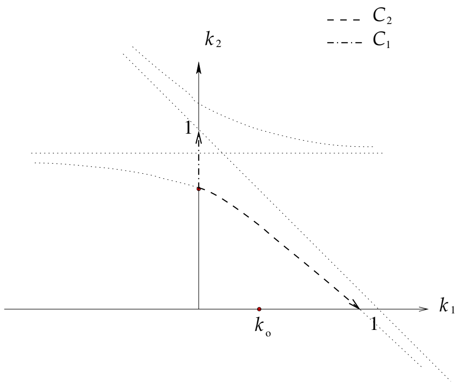

Figure 3: Allure des courbes de choc issues de l'axe des véhicules lents.

$\mathcal{C}_j(\underline{\mathbf{k}})^{\text{rétrograde}}$ ($\kappa \leq \underline{\kappa}$) lorsque les courbes de choc "directes" sont hors de $\mathcal{S}_2$. Il est intéressant de noter que sur le bord correspondant aux véhicules rapides, $\{ k_2 = 0\}$, le morceau de $\mathcal{H}(\underline{\mathbf{k}})$ transverse au bord n'est *pas monotone*. Cela contraste avec les courbes de détente, qui elles sont monotones.

De plus, il existe un point remarquable à droite du point ombilical,

$$k_* := 1 - \frac{V_2}{V_1},$$

qui détermine si $\mathcal{C}_2(\underline{\mathbf{k}})^{\text{rétrograde}}$ quitte $\mathcal{S}_2$ par l'axe des véhicules lents (cas $\underline{k}_1 > k_*$) ou par l'axe des véhicules rapides (cas $k_o < \underline{k}_1 < k_*$). Plus précisément, si $k_o < \underline{k}_1 < k_*$ et $\underline{k}_2 = 0$, $\mathcal{H}_2(\underline{\mathbf{k}})$ recoupe l'axe $\{ k_2 = 0 \}$ au point $\varphi(\underline{k}_1)$, où φ est la fonction affine caractérisée par

$$\varphi([\,0\,,\,k_o\,]) = [\,k_o\,,\,1\,]\,,\quad \varphi([\,k_o\,,\,k_*]) = [\,0\,,\,k_o\,]\,.$$

Ceci aboutit à une classification surprenante des chocs sur l'axe des véhicules rapides. Rappelons pour cela la

Définition 3.4. *Une discontinuité de vitesse s entre deux états $\mathbf{k}_-$ et $\mathbf{k}_+$ est appelée*

- 1-*choc de Lax si*
$$\lambda_1(\mathbf{k}_+) < s < \lambda_1(\mathbf{k}_-) \quad \textit{et} \quad s < \lambda_2(\mathbf{k}_+)\,,$$
- 2-*choc de Lax si*
$$\lambda_2(\mathbf{k}_+) < s < \lambda_2(\mathbf{k}_-) \quad \textit{et} \quad s > \lambda_1(\mathbf{k}_-)\,,$$

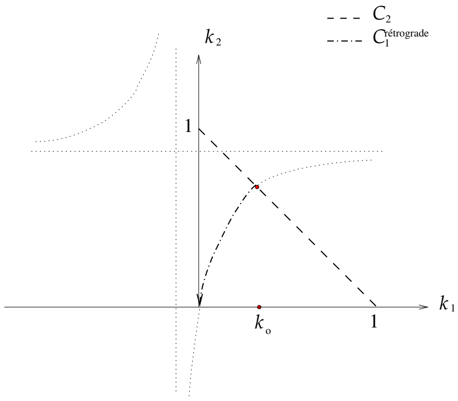

Figure 4: Allure des courbes de choc issues des états saturés. Noter que $\mathcal{C}_2 = \mathcal{D}_2$ est une courbe complète, le long de laquelle l'inégalité d'entropie de Lax est une égalité.

- *choc surcompressif si*

$$\lambda_{1,2}(\mathbf{k}_+) < s < \lambda_{1,2}(\mathbf{k}_-)\,.$$

Et de façon tout à fait élémentaire, on prouve la

Proposition 3.2. *Soient deux états $\mathbf{k}_-$ et $\mathbf{k}_+$ sur l'axe des véhicules rapides, d'abscisses respectives k_- et k_+, avec $k_- < k_o < k_+$. Alors la discontinuité associée, de vitesse $s = V_1\,(\,1 - k_- - k_+\,)$, est*

- *un 1-choc de Lax si $k_+ > \varphi(k_-)$ et $\varphi(k_+) < k_-$,*
- *un 2-choc de Lax si $k_+ < \varphi(k_-)$ et $\varphi(k_+) > k_-$,*
- *un choc surcompressif si $k_+ < \varphi(k_-)$ et $\varphi(k_+) < k_-$.*

De façon non moins élémentaire, on voit qu'il existe bel et bien des chocs surcompressifs. Dans un cadre plus standard (c'est-à-dire pour un système strictement hyperbolique partout), la théorie de Majda [13] montre que les chocs surcompressifs sont *structurellement instables*, c'est-à-dire qu'ils ne persistent pas tels quels, mais se scindent généralement en deux ondes distinctes; ce problème étant en fait lié à la possible non-unicité de la solution du problème de Riemann. Comme le suggère notre remarque à la fin de cette section (voir aussi la Proposition 4.4 dans [1]), la solution du problème de Riemann pour le modèle (3)-(5) reste unique au voisinage des chocs surcompressifs.

Connaissant les courbes de chocs et les courbes de détente, on définit simplement les courbes de Lax comme réunions des deux. Avec les notations introduites, la j-courbe de Lax est

$$\mathcal{L}_j(\underline{\mathbf{k}}) := \mathcal{D}_j(\underline{\mathbf{k}}) \cup \mathcal{C}_j(\underline{\mathbf{k}})\,.$$

On peut également définir la j-courbe de Lax rétrograde, en réunissant l'autre partie de la courbe intégrale de r_j (où $\lambda_j < \lambda_j(\underline{\mathbf{k}})$) avec la courbe de choc rétrograde $\mathcal{C}_j(\underline{\mathbf{k}})^{\text{rétrograde}}$.

Les courbes de Lax sont les ingrédients nécessaires à la résolution du problème de Riemann, c'est-à-dire le système (3)-(5) avec une donnée initiale de la forme

$$\mathbf{k}(x) = \begin{cases} \mathbf{k}_-\,, & x < 0\,,\\ \mathbf{k}_+\,, & x > 0\,.\end{cases}$$

En cherchant une solution *autosimilaire* (c'est-à-dire ne dépendant que de x/t), la résolution du problème de Riemann revient essentiellement à trouver un état intermédiaire $\mathbf{k}_{\text{int}}$ tel que

$$\mathbf{k}_{\text{int}} \in \mathcal{L}_1(\mathbf{k}_-) \quad \text{et} \quad \mathbf{k}_+ \in \mathcal{L}_2(\mathbf{k}_{\text{int}})\,,$$

ou de façon équivalente

$$\mathbf{k}_{\text{int}} \in \mathcal{L}_1(\mathbf{k}_-) \cap \mathcal{L}_2(\mathbf{k}_+)^{\text{rétrograde}}\,.$$

À cause du point ombilical, on peut redouter la non-unicité des solutions. Et à première vue, cela semble se produire. L'allure des courbes de choc semble en effet compatible avec un phénomène tout à fait irréaliste, à savoir l'apparition spontanée de véhicules lents ! Car, si un état $\mathbf{k}_-$, à gauche du point ombilical, et un état $\mathbf{k}_+$, à droite du point ombilical, tous deux sur l'axe des véhicules rapides, sont tels que les courbes $\mathcal{C}_1(\mathbf{k}_-)$ et $\mathcal{C}_2(\mathbf{k}_+)^{\text{rétrograde}}$ s'intersectent en un point $\mathbf{k}_{\text{int}}$, nécessairement *intérieur* à $\mathcal{S}_2$, on obtient une solution apparemment non physique. Mais en fait, le calcul des vitesses s_- et s_+ des discontinuités entre $\mathbf{k}_-$ et $\mathbf{k}_{\text{int}}$, et $\mathbf{k}_{\text{int}}$ et $\mathbf{k}_+$ respectivement, montre qu'elles sont toutes deux égales à

$$V_1\,(\,1\,-\,k_1^{\text{int}}\,-\,k_2^{\text{int}}\,)\,.$$

Par conséquent, les deux chocs sont accollés et on ne "voit pas" l'état intermédiaire non physique.

4 Quelques simulations numériques

Dans tout ce qui suit, les valeurs numériques utilisées sont

$$V_1\,=\,30\,,\quad V_2\,=\,10\,,$$

ce qui donne

$$k_o\,=\,2/5 \quad \text{et} \quad k_*\,=\,2/3\,,$$

et le schéma numérique est tout simplement le schéma de Lax-Friedrichs :

$$\mathbf{k}_j^{n+1}\,=\,\frac{\mathbf{k}_{j-1}^n\,+\,2\,\mathbf{k}_j^n\,+\,\mathbf{k}_{j+1}^n}{4}\,-\,\frac{\Delta t}{2\,\Delta x}\,\left(\mathbf{q}_{j+1}^n\,-\,\mathbf{q}_{j-1}^n\right)\,,$$

avec la condition CFL

$$\Delta t\,=\,\frac{1}{2}\,\Delta x\,\max\left(\,|\lambda_1|\,,\,|\lambda_2|\,\right)$$

(ou un peu moins dans certains cas). Pour obtenir une résolution correcte des chocs, on a pris un nombre assez important de points (entre 2000 et 5000).

Tout d'abord, il est intéressant d'observer un phénomène "*non FIFO*", comme le dépassement d'un peloton de véhicules lents par un peloton de véhicules rapides, voir la figure 5.

Nous donnons ensuite quelques exemples de résolution numérique du problème de Riemann, afin de confronter le modèle numérique à la théorie brièvement décrite au §3.2, ainsi qu'à l'intuition physique, et de vérifier que le point ombilical ne pose pas de problème particulier.

Exemples de problèmes de Riemann Dans chaque cas, on a tracé les concentrations (k_1 en trait plein et k_2 en pointillé) à $t\,=\,10$ à gauche, et la trajectoire suivie par la solution dans le plan $(k_1\,,k_2)$.

5 Conclusion

Le modèle multi-classes (3), bien que présentant des propriétés non-standard (perte d'hyperbolicité, existence de chocs sous-compressifs, et dégénérescence d'un champ de vecteurs au bord de l'espace des états) se comporte remarquablement bien dans diverses situations. Les simulations numériques, effectuées avec un schéma très simple, donnent des résultats de bonne qualité et conformes à l'intuition physique.

Références

[1] S. Benzoni-Gavage et R. Colombo. An n-populations model for traffic flow. *Europ. J. Applied Math*, à paraître.

[2] S. Chanut. *Vers une modélisation macroscopique d'un écoulement bi-fluide poids lourds et véhicules légers*. PhD thesis, ENTPE, Vaulx en Velin, France, En préparation.

[3] S. Chanut et C. Buisson. Godunov discretization of a two-flow macroscopic model for mixed traffic with distiguished speeds and lengths. Washington, January 2003. Transportation Research Board, 82nd annual meeting.

[4] C. F. Daganzo. A continuum theory of traffic dynamics for freeways with special lanes. *Transportation Res. Part B*, 31(2):83–102, 1999.

[5] E. Godlewski et P.-A. Raviart. *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*. Springer-Verlag, New York, 1996.

[6] D. Hoff. Invariant regions for systems of conservation laws. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 289(2):591–610, 1985.

[7] E. N. Holland et A. W. Woods. A multi-class traffic flow model - an extension of LWR model with heterogeneous drivers. *Transportation Res. Part A*, 31(6):473–485, 1997.

[8] S.P. Hoogendoorn. *Multiclass continuum modelling of multilane traffic flow*. PhD thesis, Delft University of Technology, Delft, Pays-Bas, 1999.

[9] A. Klar et R. Wegener. A hierarchy of models for multilane vehicular traffic. I. Modeling. *SIAM J. Appl. Math.*, 59(3):983–1001 (electronic), 1999.

[10] A. Klar et R. Wegener. A hierarchy of models for multilane vehicular traffic. II. Numerical investigations. *SIAM J. Appl. Math.*, 59(3):1002–1011 (electronic), 1999.

[11] P. D. Lax. Hyperbolic systems of conservation laws. II. *Comm. Pure Appl. Math.*, 10:537–566, 1957.

[12] J.-P. Lebacque. Problèmes de modélisation des réseaux par les modèles du premier ordre : conditions aux limites, intersections, affectation. 2003. Actes de l'École d'Automne Modélisation Mathématique du Trafic Automobile, ce même volume.

[13] A. Majda. *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables*. Springer-Verlag, New York, 1984.

[14] P. G. Michalopoulos, D. E. Beskos, and Y. Yamauchi. Multilane traffic flow dynamics: some macroscopic considerations. *Transportation Res. Part B*, 18(4-5):377–395, 1984.

[15] D. Serre. *Systèmes de lois de conservation. II.* Fondations. Diderot Editeur, Paris, 1996. Structures géométriques, oscillations et problèmes mixtes.

[16] G. B. Whitham. *Linear and nonlinear waves*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1999. Reprint of the 1974 original, A Wiley-Interscience Publication.

[17] G. C. K. Wong et S. C. Wong. A multi-class traffic flow model - an extension of LWR model with heterogeneous drivers. *Transportation Res. Part A*, 36:827–841, 2002.

[18] H. M. Zhang et W. L. Jin. A kinematic wave traffic flow model for mixed traffic. Washington, January 2002. Transportation Research Board, 81st annual meeting.

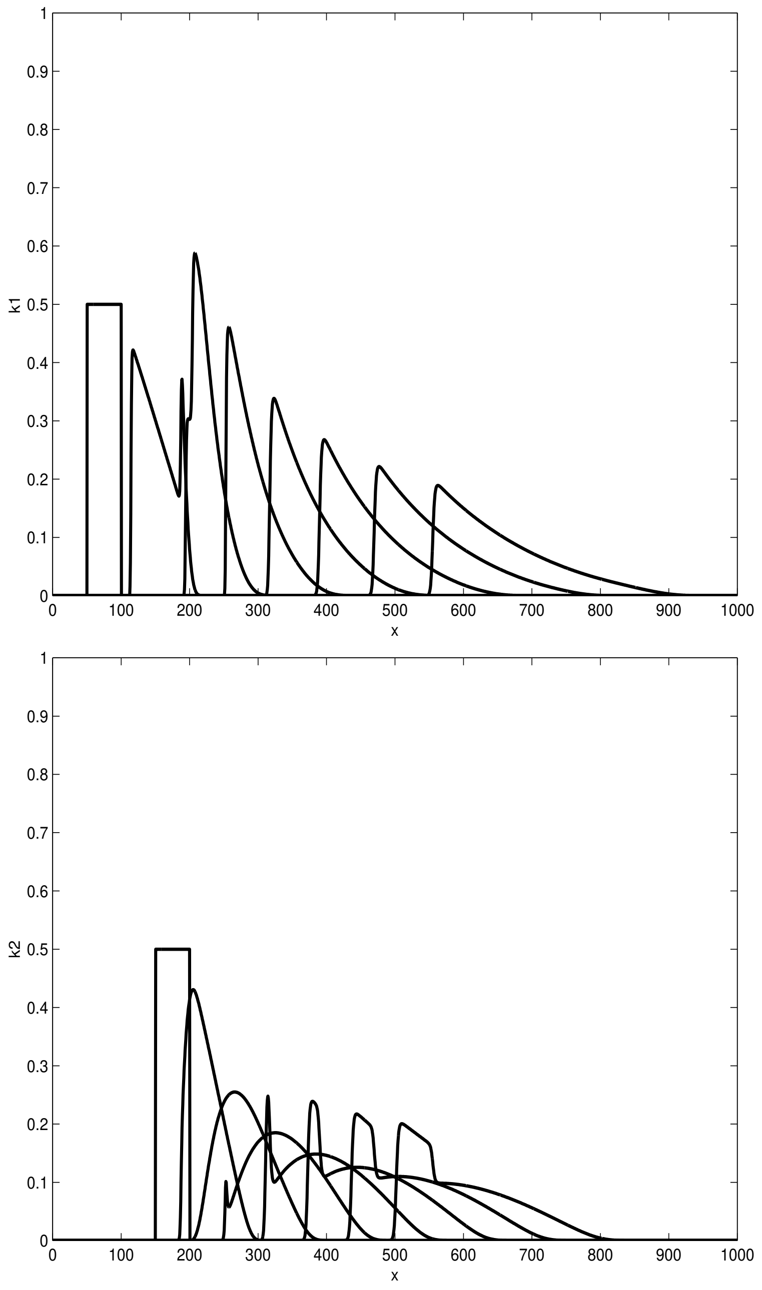

Figure 5: Dépassement d'un peloton de véhicules lents par un peloton de véhicules rapides (tracés effectués toutes les 450 itérations).

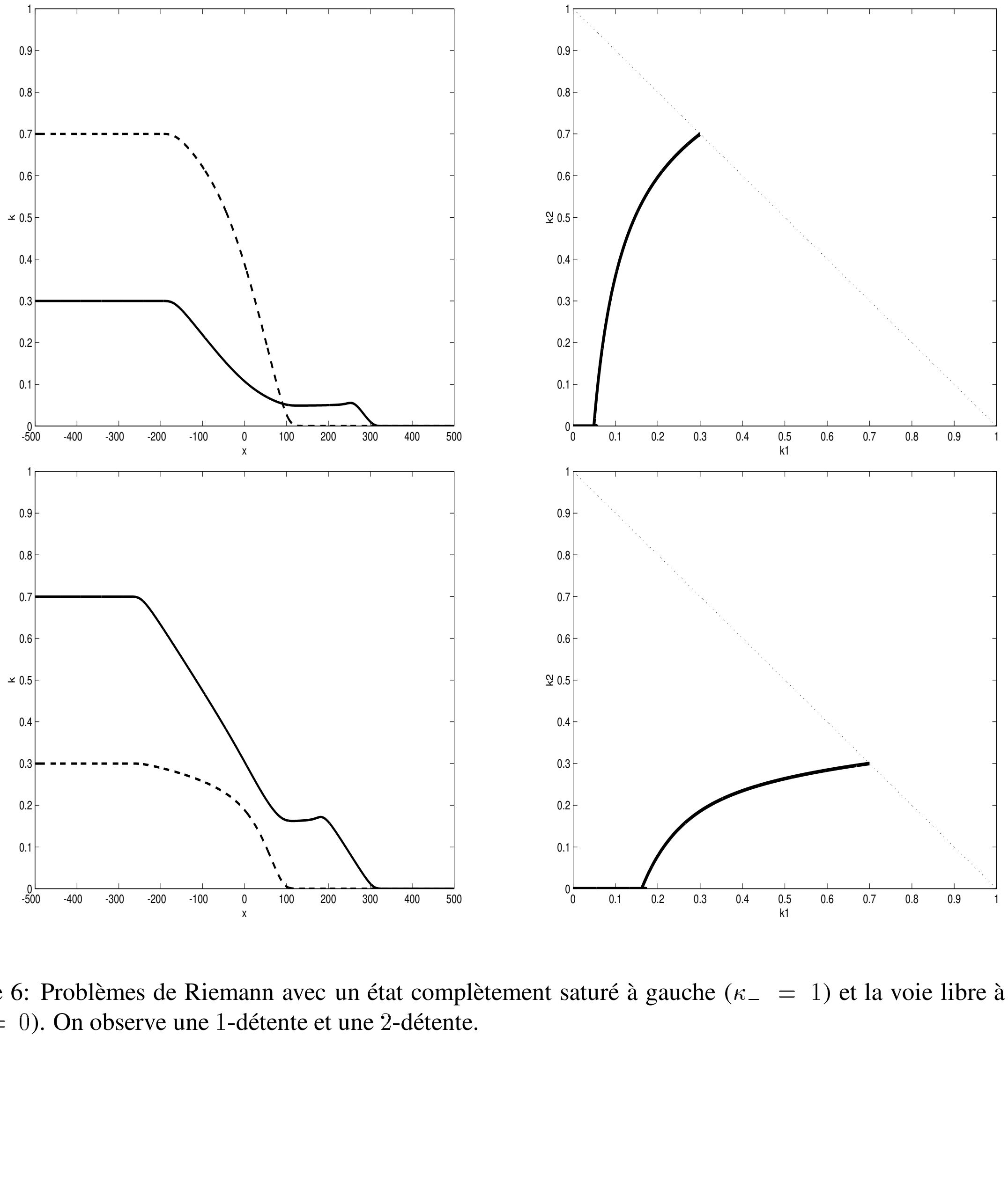

Figure 6: Problèmes de Riemann avec un état complètement saturé à gauche ($\kappa_- = 1$) et la voie libre à droite ($\kappa_+ = 0$). On observe une 1-détente et une 2-détente.

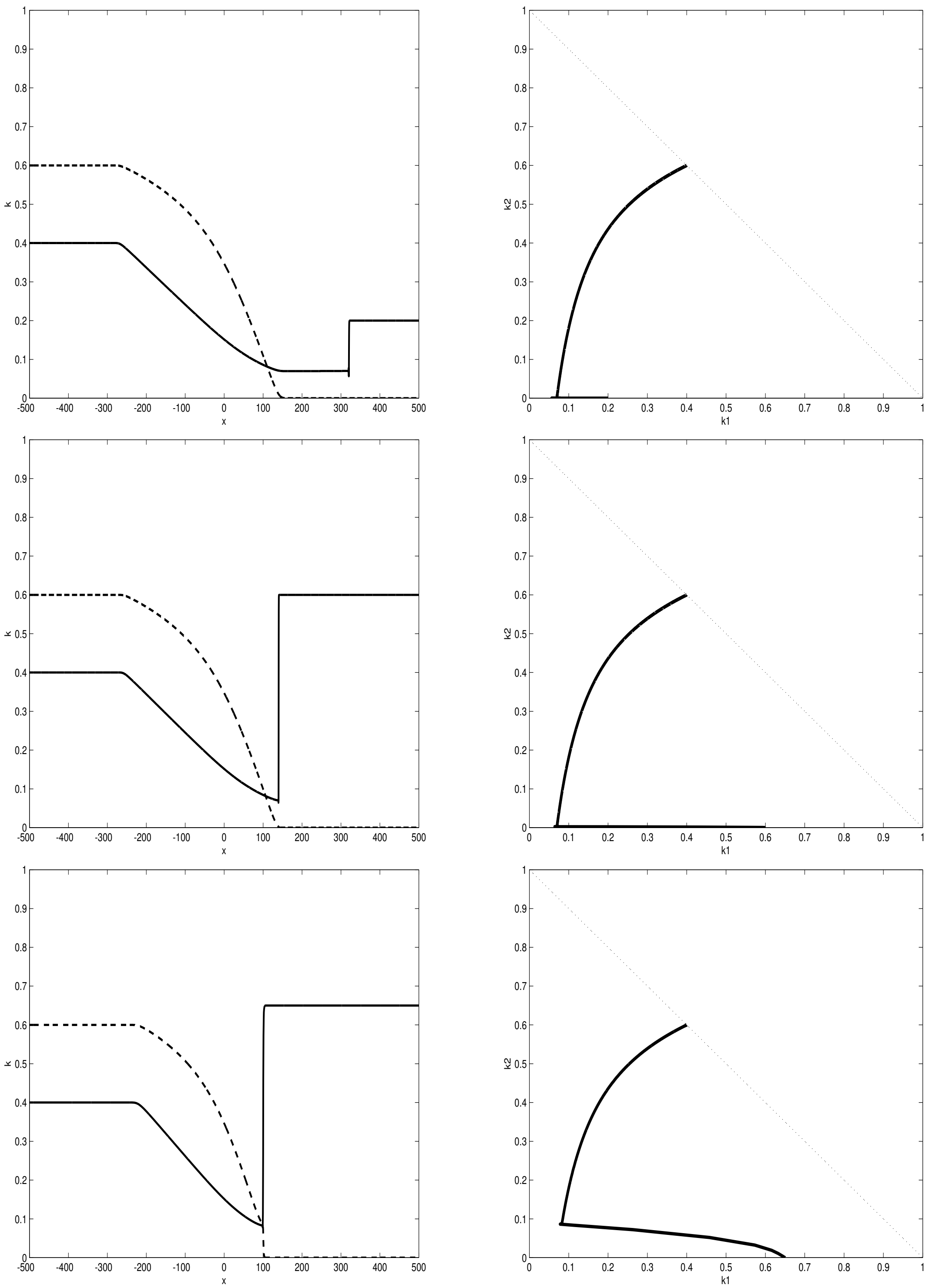

Figure 7: Problèmes de Riemann avec un état complètement saturé à gauche ($\kappa_- = 1$) et seulement des véhicules rapides à droite ($k_2^+ = 0$). On observe une 1-détente et un 2-choc.

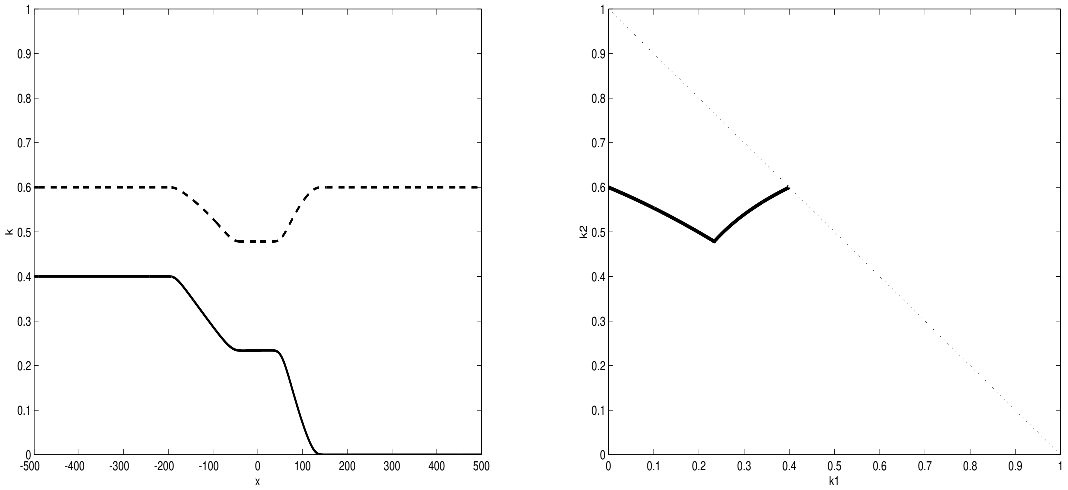

Figure 8: Problème de Riemann avec un état complètement saturé à gauche ($\kappa_- = 1$) et seulement des véhicules lents à droite ($k_1^+ = 0$). On observe une 1-détente et une 2-détente.

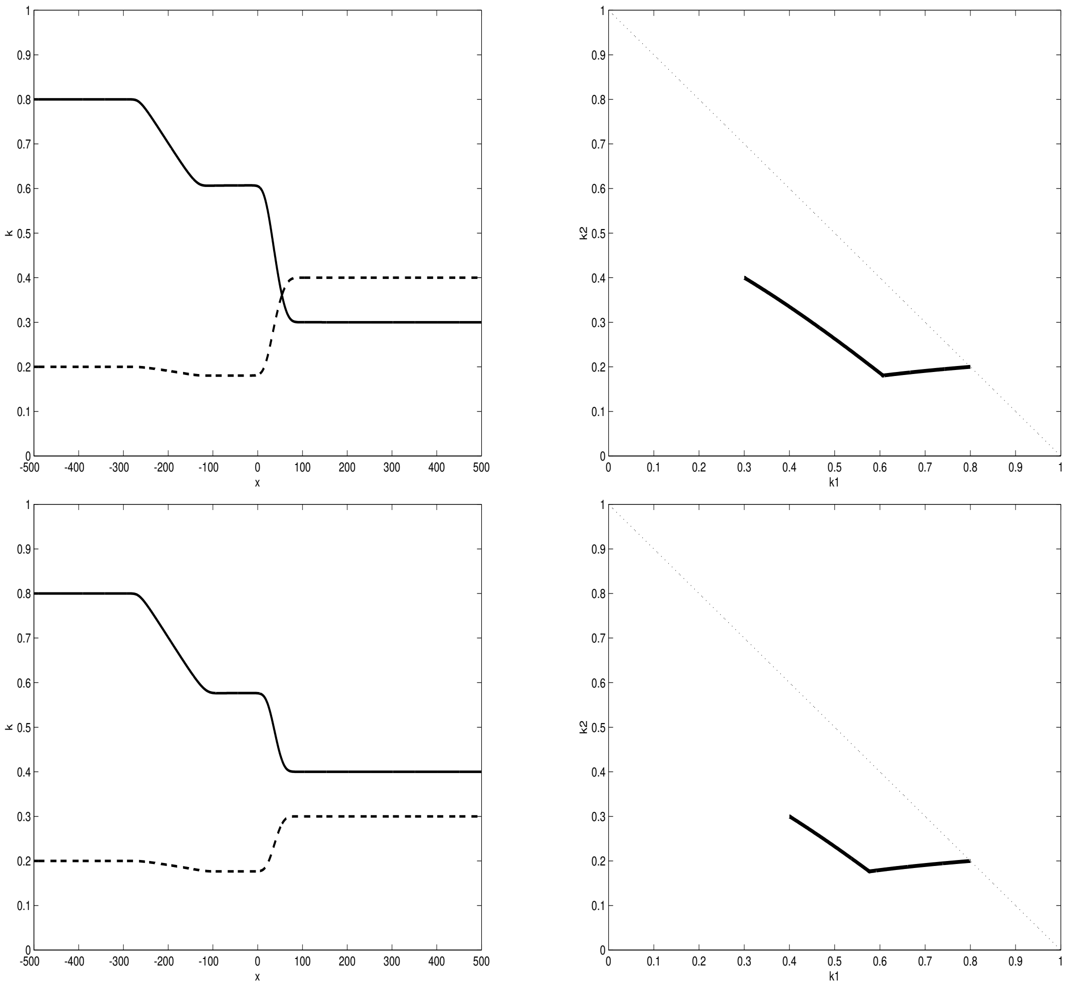

Figure 9: Problèmes de Riemann avec un état complètement saturé à gauche ($\kappa_- = 1$) et un trafic mixte à droite. On observe encore une 1-détente et une 2-détente.

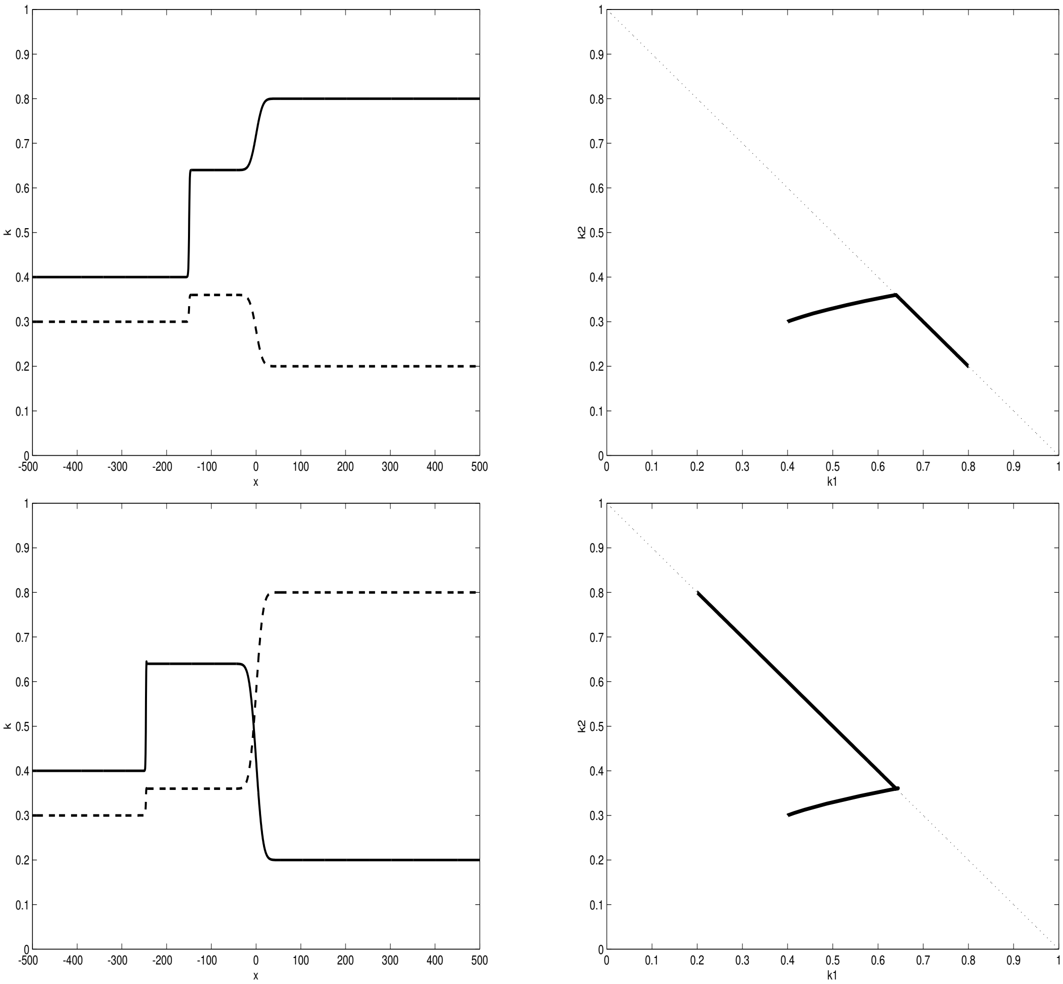

Figure 10: Problèmes de Riemann avec un un trafic mixte à gauche et un état complètement saturé à droite ($\kappa_+ = 1$) (nombre CFL réduit à 0.4 dans le deuxième cas). On observe un 1-choc et une “discontinuité de contact”. Sa résolution est moins bonne que celles des chocs.

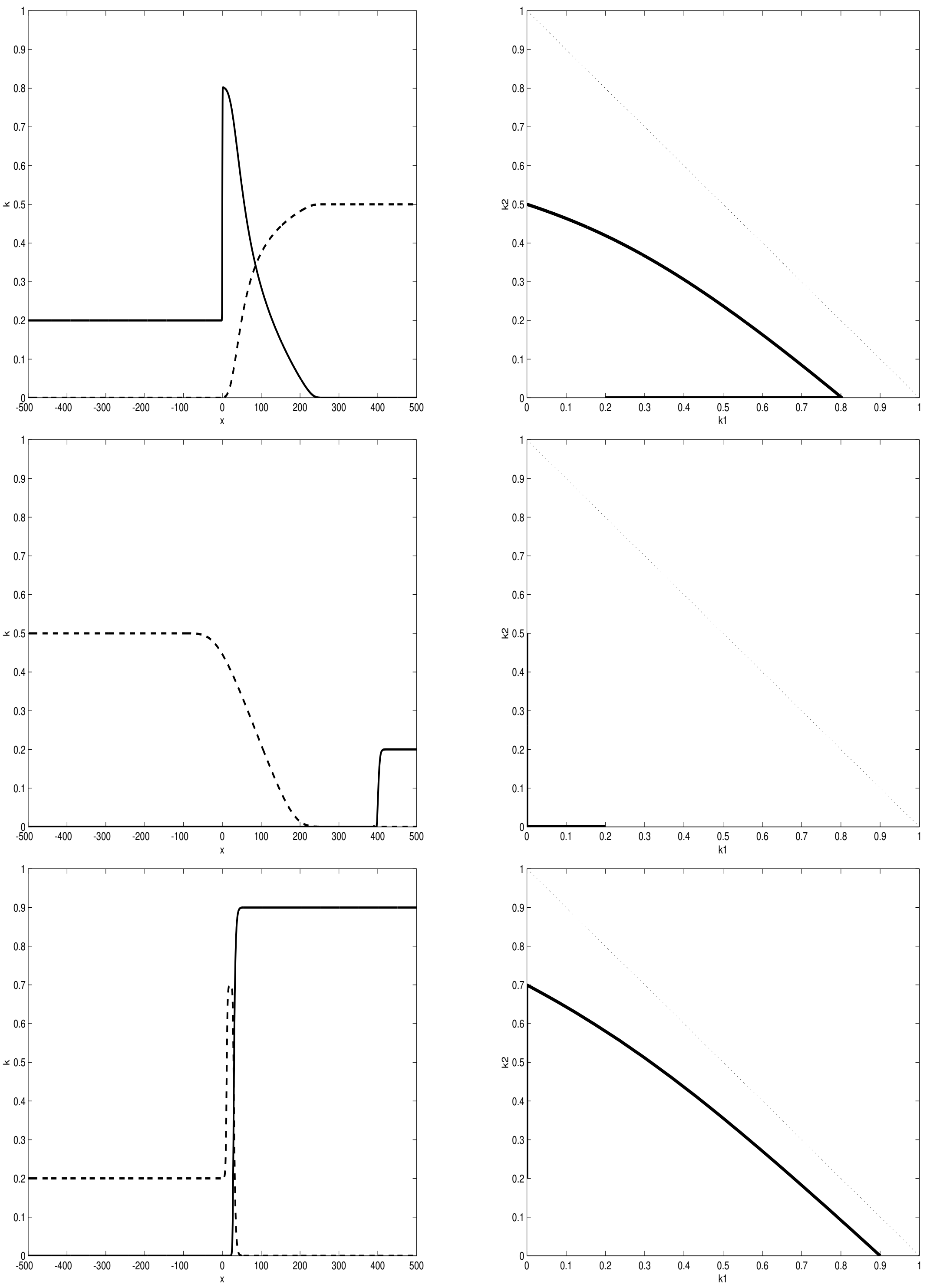

Figure 11: Problèmes de Riemann avec seulement des véhicules rapides d’un coté et seulement des véhicules lents de l’autre (nombre CFL réduit à 0.4 dans le deuxième cas).