Notes de cours
Algèbre Linéaire et Analyse Matricielle
3BIM INSA Lyon
2014-2015
v19112014

---

1 Introduction

Ces notes de cours sont inspirées des livres de Algèbre des matrices de J Fresnel [1] et Numerical Linear Algebra de LN Trefethen et D Bau III [2].

1.1 Espaces vectoriels

Définition 1. Soit K un corps commutatif ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Un ensemble E muni d'une somme $+$ (application de $E \times E \to E$ commutative et associative avec élément 0 neutre et élément inverse) et d'une multiplication $\cdot$ par un scalaire appartenant à K (application de $K \times E \to E$) est un **espace vectoriel** sur K, $(E, K, +, \cdot)$, s'il possède les propriétés suivantes:

Pour tout $\mu, \lambda \in K$ et $x, y \in E$,

$$\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y, \tag{1}$$

$$(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x, \tag{2}$$

$$1 \cdot x = x, \tag{3}$$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x. \tag{4}$$

On note E l'espace vectoriel. On utilise l'abréviation e.v. pour un espace vectoriel.

De la définition découle que E doit contenir l'élément 0_E. C'est la première chose à vérifier quand on teste si un espace est un espace vectoriel.

Définition 2. Soit E un espace vectoriel sur K. Une partie F non-vide de E est appelée **sous-espace vectoriel** de E, si pour tout $x, y \in F$ on a $x - y \in F$ et si pour tout $\lambda \in K$ et $x \in F$, on a $\lambda \cdot x \in F$. On utilise l'abréviation s.e.v. pour un sous-espace vectoriel.

Exemples K est un est un e.v. sur K.

$\mathbb{C}$ est un e.v. sur $\mathbb{R}$.

L'ensemble des fonctions continues C^0 est un e.v. sur $\mathbb{R}$.

E est un s.e.v. de E.

$\{0_E\}$ est un s.e.v. de E.

$0_E \in F$ pour tout F s.e.v. de E.

Si $x \in E$ et $x \neq 0_E$, alors l'ensemble $\{\lambda \cdot x | \lambda \in K\}$ est un s.e.v.

Si F et G sont des s.e.v., alors $F \cap G$ est un s.e.v.

Pour simplifier les notation, on omettra le symbole de multiplication par un scalaire: $\lambda \cdot x = \lambda x$, et on dénotera le zéro d'un espace vectoriel par 0.

Exercice 1. Déterminer lesquels des ensembles $E_1, \ldots, E_4$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Calculer leurs dimensions.

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = x + y + z = 0\}$.
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 - y^2 = 0\}$.
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | e^x e^y = 0\}$.
4. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z(x^2 + y^2) = 0\}$.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$, muni de la somme interne $\oplus$ définie par $a \oplus b = ab$, pour tout $a, b \in E$ et la loi de multiplication par un scalaire $\otimes$ définie par $\lambda \otimes a = a^\lambda$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $a \in E$. Montrez que E muni de ces deux loi est un e.v. sur $\mathbb{R}$.

1.2 Applications linéaires

Définition 3. Soit E et F deux e.v. sur K. Une application $f : E \to F$ est appelée **application linéaire** si

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad \text{pour tout } x, y \in E \tag{5}$$

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \qquad \text{pour tout } x \in E, \lambda \in K \tag{6}$$

Un **isomorphisme** est une application linéaire bijective. L'inverse d'un isomorphisme est aussi une application linéaire. Un **endomorphisme** de l'e.v. E est une application linéaire de E dans E. Un **automorphisme** est un endomorphisme bijectif.

Définition 4. Soit E et F deux e.v. sur K et f une application linéaire de E vers F. Le **noyau** de l'application linéaire f est l'ensemble

$$\ker f = \{x \in E | f(x) = 0\}. \tag{7}$$

La notation ker vient de l'allemand pour noyau, Kern.

Le noyau d'une application linéaire contient toujours 0 ($f(0) = 0$ pour toute application linéaire f).

Exemples L'application id_E où $\mathrm{id}_E(x) = x$ pour tout $x \in E$ est un automorphisme.

Si $f : E \to F$ est une application linéaire, l'application $x \to \lambda f(x)$ est aussi linéaire. Si $g : E \to F$ est une application linéaire, alors $x \to f(x) + g(x)$ est une application linéaire (notée $f + g$). $\mathcal{L}_K(E, F)$, l'ensemble des applications linéaires de E dans F, est un espace vectoriel sur K.

Exercice 3. Donnez un exemple d'endomorphisme surjectif mais pas injectif. Donnez un exemple d'endomorphisme injectif mais pas surjectif.

1.3 Famille, partie libre, génératrice, base

Définition 5. Soit E un e.v. sur K, on appelle **famille de E indexée par un ensemble** I une application de I dans E. Cette application associe $i \to x_i$. On note cette famille sous la forme $(x_i)_{i\in I}$. La notion de famille généralise celle d'une suite, où l'index n'est pas nécessairement entier.

Exercice 4. Soit E un e.v. sur K et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de s.e.v de E. On note

$$\sum_{i\in I} E_i \tag{8}$$

le sous-ensemble des éléments $x \in E$ qui possèdent la propriétés suivante: il existe une famille $(x_i)_{i\in I}$ de E avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \in I$ et $x_i = 0$ pour tout $i \in I$ sauf pour un nombre fini de valeurs i, et $x = \sum i \in I x_i$. C'est l'ensemble des éléments $x \in E$ qui s'expriment comme une somme finie d'éléments de E_i. Cet ensemble est appelé **somme des sous-espaces vectoriels** E_i. On dit que la somme est **directe** si tout $x \in \sum E_i$ admet une décomposition unique sous la forme $x = \sum i \in I x_i$ avec $x_i \in E_i$ et $x_i = 0$ sauf pour un nombre fini de valeurs i. On note la somme directe des E_i par

$$\bigoplus_{i\in I} E_i. \tag{9}$$

Soit E_1 et E_2 deux s.e.v. de E. Si $E = E_1 + E_2$ et que $E_1 \bigcap E_2 = \{0\}$, alors on dit que E_2 est un sous-espace supplémentaire de E_1 dans E.

1. On considère les vecteurs $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$ et $v_5 = (0,1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$. Vect$\{v_1, v_2\}$ et Vect$\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$? Même question pour Vect$\{v_1, v_3, v_4\}$ et Vect$\{v_2, v_5\}$. (Vect$\{x_1, ..., x_n\}$ est le s.e.v. engendré par les combinaisons linéaires de $x_1, ..., x_n$. C'est donc la somme des s.e.v. $E_i = \{\lambda x_i\}$).
2. Soit E un e.v. sur K et E_1 et E_2 deux s.e.v. supplémentaires de E. Montrer que $E = E_1 \oplus E_2$, c.-à-d. que la somme est directe.

Une famille $(y_j)_{j\in J}$ est appelée **sous-famille** de $(x_i)_{i\in I}$ si $J \subset I$ et si $y_j = x_j$ pour tout $j \in J$. On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une **sur-famille** de $(y_j)_{j\in J}$.

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est **libre** si pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in I}$, $\lambda_i \in K$ à support fini (c.-à-d. $\lambda_i \neq 0$ pour un nombre fini de valeurs $i \in I$), l'égalité

$$0 = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i \tag{10}$$

implique $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I$.

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est **génératrice** si pour tout élément $x \in E$, il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$, $\lambda_i \in K$ à support fini telle que

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i. \tag{11}$$

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de E est une **base** de E si elle est libre et génératrice. Ça veut dire que pour tout $x \in E$, il existe une famille *unique* $(\lambda_i)_{i\in I}$, $\lambda_i \in K$ à support fini telle que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$. L'élément λ_i est la **coordonnée de** x dans la base $(x_i)_{i\in I}$.

Exercice 5. Soit $(e_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ une famille libre. Que peut-on dire de la famille $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_{n-1} + e_n, e_n + e_1)$?

1.4 Base, dimension

Proposition 1.1. *Soit E un e.v. sur K et $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ une famille de E (famille indexée par $I = \{1, \dots, n\}$). Les énoncés suivants sont équivalents:*

i) *$\mathcal{B}$ est une base (c.-à-d. libre et génératrice)*

ii) *$\mathcal{B}$ est une famille génératrice minimale de E (c.-à-d. aucune sous-famille distincte n'est génératrice)*

iii) *$\mathcal{B}$ est une famille libre maximale de E (c.-à-d. aucune sur-famille distincte n'est libre).*

Théorème 1.2. *Base incomplète. Soit E un e.v. sur K de type fini, $(g_i)_{I\in I}$ une famille génératrice et $(\ell_j)_{j\in J}$ une famille libre, finie et qui est une sous-famille de g. Alors ℓ est une sous-famille d'une famille $\mathcal{B}$ finie, base de E et sous-famille de g.*

Une base de E est la plus "petite" famille génératrice, si on enlève un élément de la famille, elle n'est plus génératrice. C'est aussi la plus "grande" famille libre, si on ajoute un élément, cet élément peut s'écrire comme combinaison linéaire. Une base de E n'est pas unique.

Proposition 1.3. *Soit E un e.v. de type fini, c.-à-d. que E admet une famille génératrice finie. Alors*

i) *E admet une base $\mathcal{B}$ indexée sur un ensemble fini. Le cardinal (nombre d'éléments) de cet ensemble est noté* $\operatorname{card}\mathcal{B}$.

ii) *Soit $\mathcal{B}'$ une base de E, alors $\mathcal{B}'$ est une famille indexée sur un ensemble fini et* $\operatorname{card}\mathcal{B}' = \operatorname{card}\mathcal{B}$.

Le $\operatorname{card}\mathcal{B}$ *s'appelle dimension de E sur K et se note* $\dim_K E$. $\dim_K E = 0$ *si* $E = \{0\}$.

Proposition 1.4. *Soit E un e.v. sur K, avec* $\dim_K E = n$, *et $\mathcal{B}$ une famille de E finie (indexée sur un ensemble fini). Si $\mathcal{B}$ possède deux des trois propriétés suivantes, alors $\mathcal{B}$ est une base de E.*

i) $\operatorname{card}\mathcal{B} = n$.

ii) *$\mathcal{B}$ est une famille libre de E.*

iii) $\mathcal{B}$ *est une famille génératrice de* E.

Proposition 1.5. *Soit* E *et* F *deux e.v. sur* K *de type fini. Les énoncés suivants sont équivalents.*

i) E *est isomorphe à* F *(c.-à-d qu'il existe un isomorphisme de* E *vers* F*).*

ii) $\dim_K E = \dim_K F$.

Les e.v. de type fini (et donc de dimension finie), à isomorphisme près, sont donc classifiés par leur dimension $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.6. *Existence de base. Soit* E *un e.v. sur* K *(pas nécessairement de type fini), et* $(e_i)_{i\in I}$ *une famille libre sur* E. *Alors il existe une sur-famille* $(f_j)_{j\in J}$ *de* $(e_i)_{i\in I}$ *qui est libre et génératrice. Il suit que* E *admet une base i.e. une famille libre et génératrice.*

Exercice 6. Un endomorphisme u d'un e.v. E sur K est **nilpotent** s'il existe $k \geq 1$ tel que $u^k = 0$. Le plus petit entier k vérifiant cette propriété est appelé **indice de nilpotence**. (La puissance u^k est la composée de u, k fois: $u^2(x) = u(u(x))$. L'égalité $u^k = 0$ est l'égalité de l'application u^k et le l'application 0, c.-à-d. que $u^k(x) = 0$ pour tout $x \in E$).

Soit u un endomorphisme nilpotent d'un e.v. E sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n. Soit k l'indice de nilpotence de u.

1. Soit $x \in E$ tel que $u^{k-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $(x, u(x), u^2(x), ..., u^{k-1}(x))$ est libre. En déduire que $k \leq n$.
2. Soit $F_j = \ker u^j$. Montrez que $F_0 \subset F_1 \subset F_2$... S'arrête-t-on à un moment (est-ce qu'il existe m tel que $F_j = F_m$ pour tout $j > m$) ?
3. Supposons que $k = n$. Montrez que la famille $(x, u(x), u^2(x), ..., u^{k-1}(x))$ est une base de E.
4. Soit v un endomorphisme de E tel que $uv = vu$. Montrer que uv est nilpotent. Que peut-on dire de son indice de nilpotence ?
5. On pose
$$\exp(u) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{u^i}{i!}. \tag{12}$$
Est-ce que cette expression est bien définie ?

Exercice 7. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré $\leq n$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. On note D l'opérateur de dérivation. Montrez que D est un endomorphisme nilpotent. Quel est son indice de nilpotence ?
3. Soit $x = X^n/n! \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrez que $D^{n-1} \neq 0$. En déduire que la famille $(x, Dx, D^2x, ..., D^{n-1}x)$ est une base (voir exercice 6).

1.5 Matrices, rang d'une application linéaire

Proposition 1.7. *Soit* E *et* F *deux e.v. sur* K *de dimensions finies,* $\dim_K E = n$ *et* $\dim_K F = p$, $n, p \geq 1$. *Soit* $(e_i)_{i=1,\ldots,n} = (e_i)_n$ *et* $(f_j)_p$ *des bases de* E *et* F. *Alors la famille* *d'applications* $(f_{ji})_{p,n}$ *données par* $f_{ji}(e_i) = f_j$ *et* $f_{ji}(e_{i'\neq i}) = 0$ *est une base de l'e.v. sur* K $\mathcal{L}(E,F)$ *des applications linéaires de* E *dans* F *et on a* $\dim_K \mathcal{L}(E,F) = \dim_K E \dim_K F$.

L'ensemble des applications linéaires d'un espace vectoriel de dimension finie n vers un espace vectoriel de dimension finie p est lui-même de dimension finie, et la dimension est np.

Définition 6. Soit E, F deux e.v. sur K de dimensions $n \geq 1, p \geq 1$, $(e_i)_n$, $(f_j)_p$ des bases de E et F, et $f : E \to F$ une application linéaire telle que

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{p} a_{ji} f_j. \tag{13}$$

Alors la **matrice de** f **dans les bases** $(e_i)_n$ **et** $(f_j)_p$, notée $\mathrm{Mat}(f,(e_i)_n,(f_j)_p)$ est la famille $(a_{ji})_{(j,i)\in[1,p]\times[1,n]}$.

$$\mathrm{Mat}(f,(e_i)_n,(f_j)_p) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \tag{14}$$

Cette matrice est une **matrice à** n **colonne et à** p **lignes** et prend ses **entrées** $a_{ji} \in K$.

En particulier, si $f : E \to E$ et $(e_i)_n$ est une base de E, f est un endomorphisme et $\mathrm{Mat}(f,(e_i)_n)$ est appelée matrice de l'endomorphisme f dans la base (e_i).

A chaque application linéaire sur des e.v. de dimensions finies correspond une matrice. L'ensemble des matrices à n colonnes et p lignes à valeurs dans K est noté $M_{p,n}(K)$ ($M_n(K)$ si $p = n$). L'ensemble $M_{p,n}(K)$ est un groupe commutatif avec l'addition entrée par entrée:

$$[a_{ji}] + [b_{ji}] = [a_{ji} + b)_{ji}]. \tag{15}$$

(Muni de cette addition, $A + B = B + A$ pour toutes matrices $A, B \in M_{p,n}(K)$). Si on se dote de la loi de multiplication par un scalaire $\lambda[a_{ji}] = [\lambda a_{ji}]$, pour $\lambda \in K$, alors $M_{p,n}(K)$ est un espace vectoriel sur K.

Définition 7. On définit le **produit matriciel** entre deux matrices $A \in M_{p,n}(K)$ et $B \in M_{n,\ell}(K)$ comme la matrice $C \in M_{p,\ell}(K)$ avec

$$c_{jk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} b_{ik}. \tag{16}$$

On note le produit matriciel de A et B par AB.

Un vecteur peut être vu comme la matrice à une colonne $x \in M_{n,1}(K)$. Si $M \in M_{p,n}(K)$, alors le produit $Mx \in M_{p,1}$ est aussi un vecteur. L'application $x \to Mx$

est une application linéaire de $M_{n,1}(K)$ vers $M_{p,1}(K)$. Ces deux e.v. sont isomorphes à K^n et K^p, et on note l'application correspondante $\hat{M} : K^n \to K^p$.

En dimension finie, les applications linéaires peuvent êtres représentées comme des matrices, les éléments de e.v. comme des vecteurs, et l'action de l'application linéaire sur les éléments comme le produit d'une matrice par un vecteur.

Théorème 1.8. (Théorème du rang). *Soit E et F deux e.v. et $f : E \to F$ une application linéaire. On suppose que E est de dimension finie. Alors* $\operatorname{im} f \equiv f(E)$ *est de dimension finie et on a* $\dim_K(\operatorname{im} f) + \dim_K(\ker f) = \dim_K E$. *La dimension de $f(E)$, est le rang de f et se note* $\operatorname{rang} f$.

Corollaire 1.9. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire,* $\dim_K E$ *et* $\dim_K F$ *finies. Alors* $\operatorname{rang} f = \dim_K E$ *si et seulement si f est injective et* $\operatorname{rang} f = \dim_K F$ *si et seulement si f est surjective.*

Si $\dim_K E = \dim_K F$*, alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) *f est injective.*

ii) *f est surjective.*

iii) *f est bijective.*

Le théorème du rang et ses corollaires nous indiquent comment les applications linéaires décomposent un e.v. entre l'image de f et son noyau.

Exercice 8. Revisitez l'exercice 3 à la lumière du théorème du rang.

Définition 8. Soit $A \in M_{p,n}(K)$ une matrice $p \times n$. On appelle **transposée** de A la matrice $[b_{ij}]_{ij} \in M_{n,p}(K)$ définie par $b_{ij} = a_{ji}$, et est notée ${}^tA$ ou $\bar{A}$.

On a ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$, ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$, ${}^t(AC) = {}^tC {}^tA$, et ${}^t({}^tA) = A$. On dit qu'une matrice carrée $A \in M_n K$ est **symétrique** si ${}^tA = A$.

Proposition 1.10. $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} {}^tA$. *La dimension de l'e.v. engendré par les lignes de A est la même que celle engendrée par les colonnes de A.*

1.6 Déterminant d'une matrice

Définition 9. Déterminant d'une matrice carrée. Soit $A = [a_{ij}]_{ij} \in M_n(K)$ une matrice $n \times n$. On appelle **déterminant de** A, noté $\det A$ le scalaire défini par

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathrm{perm}(n)} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n}. \tag{17}$$

On note aussi

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{18}$$

La **signature** d'une permutation $\mathrm{sgn}(\sigma)$ vaut 1 si la permutation σ est paire et -1 si la permutation est impaire. Une permutation est **paire** (respectivement **impaire**) si elle est le produit d'un nombre pair (impair) de transpositions (permutation de deux éléments entre eux).

Le déterminant possède les propriétés suivantes:

1. $\det I = 1$.
2. $\det A = \det {}^t A$.
3. $\det[C_1 ... \sum \lambda_i C_j ... C_n] = \lambda_i \det[C_1 ... C{-}n] = \lambda_i \det C$, où C_i sont les colonnes de C.
4. $$\det \begin{bmatrix} L_i \\ \sum \lambda_i L_j \\ L_n \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}. \tag{19}$$
5. $\det[C_{\sigma(1)} ... C_{\sigma(n)}] = \mathrm{sgn}(\sigma) \det C$.
6. idem pour les lignes.
7. Si une ligne (colonnes) est une combinaison linéaire d'autres lignes (colonnes), alors $\det = 0$.
8. Soit A avec $a_{i1} = 0$ pour $i \geq 2$ et $B = [b_{ij}]$ avec $b_{ij} = a_{i+1,j+1}$. Alors $\det A = a_{11} \det B$.
9. $\det AB = \det BA = \det A \det B$.
10. A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

Le théorème suivant établi la façon classique de calculer le déterminant d'une matrice à partir de ses **mineurs**, les déterminants des sous-matrices carrées.
Théorème 1.11. *Soit* $A = [a_{ij}]_{ij} \in M_(K)$. *On a*

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{\neq k, \neq j} &(20)\\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{\neq i, \neq k}. &(21) \end{aligned}$$

Corollaire 1.12. *Soit* $A \in M_(K)$ *une matrice triangulaire par bloc*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ldots & \\ & & & A_r \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Alors $\det A = \det A_1 \det A_2 ... \det A_r$.

References

[1] Jean Fresnel. *Algebre des matrices*. Hermann, 2013.

[2] Lloyd N Trefethen and David Bau III. *Numerical linear algebra*, volume 50. Siam, 1997.