

Partiel 21 mai 2010 - 2 heures

Exercice 1. Soient n et m deux entiers strictement positifs. Donner une preuve combinatoire des identités suivantes :

a) $2 \binom{2n-1}{n} = \binom{2n}{n}$;

b) $\left(\binom{n}{m} \right) = \left(\binom{m+1}{n-1} \right)$.

Rappel : $\left(\binom{n}{m} \right)$ dénote le nombre de multiensembles de cardinal m , avec parts dans $\{1, \dots, n\}$.

Par exemple, $\left(\binom{3}{2} \right) = 6$, compte les 6 multiensembles suivants 11, 22, 33, 12, 13, 23.

Exercice 2. Soient n, p, q des entiers positifs, tels que $p \leq n$ et $q \leq n$. Prouver l'identité :

$$\binom{n}{p} \binom{n}{q} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} \binom{n-k}{q-k}.$$

Exercice 3. En utilisant les nombres de Fibonacci, donner une expression pour :

- le nombre de compositions de n avec parts égales à 1 ou 2.
- le nombre de compositions de n avec parts strictement plus grandes que 1.

Exercice 4. Prouver l'identité suivante :

$$\prod_{i \geq 1} \frac{1}{(1-xq^i)} = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{x^k q^k}{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^k)}. \quad (1)$$

Indication :

- Montrer d'abord l'identité suivante :

$$\prod_{i \geq 1} \frac{1}{(1-xq^i)} = \sum_{\lambda \in \text{Par}} x^{\ell(\lambda)} q^{|\lambda|}, \quad (2)$$

où on note Par l'ensemble des partitions, $\ell(\lambda)$ le nombre de parts (non nulles) de la partition λ , et $|\lambda|$ la somme de ses parts.

- Montrer que le membre de droite de (2) est égal au membre de droite de l'identité initiale (1).

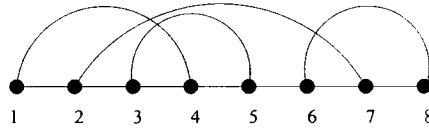


Figure 1: Le couplage $\{(1, 4), (2, 7), (3, 5), (6, 8)\}$

Exercice 5. Un *couplage parfait* de l'ensemble $[2n] = \{1, 2, \dots, n\}$ est une partition de $[2n]$ en blocs de taille deux. Tout couplage parfait peut être représenté comme un ensemble de n arcs, $\{(i_1, j_1), \dots, (i_n, j_n)\}$, où $i_r < j_r$ pour $1 \leq r \leq n$, et dessiné comme en graphe. Par exemple, le couplage $\{(1, 4), (2, 7), (3, 5), (6, 8)\}$ de $[8]$ est représenté graphiquement en Figure 1.

Deux arcs (i_r, j_r) et (i_s, j_s) forment un *croisement* si $i_r < i_s < j_r < j_s$; ils forment un *emboîtement* si $i_r < i_s < j_s < j_r$. Dans l'exemple ci-dessus, les arcs $(1, 4)$ et $(2, 7)$ forment un croisement, et les arcs $(2, 7)$ et $(3, 5)$ un emboîtement.

- a) Trouver une bijection entre l'ensemble \mathcal{C}_{2n} de couplages parfaits de $[2n]$ sans croisements et l'ensemble \mathcal{D}_{2n} des chemins de Dyck de $(0, 0)$ à $(2n, 0)$.

Indication : dessiner les éléments de l'ensemble \mathcal{C}_6 et de l'ensemble \mathcal{D}_6 , et essayer de les associer bijectivement. Généraliser à tout n .

- b) En déduire que $|\mathcal{C}_{2n}| = C_n$ le nombre de Catalan de rang n .
- c) Montrer algébriquement ce résultat (en utilisant la formule de récurrence des nombres de Catalan faite en cours).
- d) Notons \mathcal{E}_{2n} l'ensemble des couplages parfaits de $[2n]$ sans emboîtements. Calculer pour $n = 1, 2, 3$, le cardinal $|\mathcal{E}_{2n}|$. Conjecturer une formule pour $|\mathcal{E}_{2n}|$.
- e) Prouver votre conjecture.

EX 1

a)
$$2 \binom{2n-1}{n} = \binom{2n}{n}$$

Soit $S \subseteq [2n-1]$ avec n éléments
on peut lui associer deux sous-ensembles
de $[2n]$ avec n -éléments : S et $[2n] - S$

b) Pour montrer que $\binom{n}{k} = \binom{n+k-1}{k}$

on utilise la bijection suivante notée φ .

$$1 \leq b_1 \leq \dots \leq b_k \leq n$$

\updownarrow 1:1

$$1 \leq b_1 < b_2 + 1 < \dots < b_k + (k-1) \leq n+k-1$$

Soit

S un multi-ensemble de cardinal k de $[n]$

\updownarrow

$\varphi(S)$ sous-ensemble de cardinal k de $[n+k-1]$

\updownarrow

complémentaire dans $[n+k-1]$

$(\varphi(S))^c$ est un sous-ensemble de $[n+k-1]$
de cardinal $n+k-1-k = n-1$

$$(1 \leq c_1 < c_2 < \dots < c_{n-1} \leq n+k-1)$$

\updownarrow

$\varphi^{-1}(\varphi(S)^c)$ est un multi-ensemble dans $[n+k-1 - (n-2)]$
 ~~$[n+k-1 - (n-2)]$~~

de cardinal $n-1$

$$= [k+1]$$

$$(1 \leq c_1 \leq c_2 - 1 \leq \dots \leq c_{n-1} - (n-2) \leq k+1)$$

$$\Rightarrow \binom{n}{k} = \binom{k+1}{n-1}$$



EX 2

$$\binom{n}{p} \binom{n}{q} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} \binom{n-p}{q-k}$$

$\binom{n}{p} \binom{n}{q}$ compte le nombre de couples (S, T) avec $|S|=p$, $|T|=q$ et $S, T \subseteq [n]$.

On peut compter ces couples ~~en~~ selon la taille de leur intersection.

Supposons $|S \cap T| = k$

On a $\binom{n}{k}$ façons de choisir les

éléments de l'intersection. Ensuite

$\binom{n-k}{p-k}$ façons pour compléter l'ensemble S (= k éléments déjà choisis + $(p-k)$ à choisir parmi les $(n-k)$ qui restent)

$\binom{n-p}{q-k}$ façons de compléter T .

k éléments dans l'intersection, $p-k$ éléments choisis pour former S ,

du coup il nous reste à choisir $q-k$ parmi $n-k-(p-k)$ éléments. ■

EX 3

- a)
- coupes de n avec points égaux à 1 ou 2
 - supposons que la dernière lettre est 1
le nombre de ces coups est C_{n-1}
 - supposons que la dernière lettre est 2
le nombre de ces coups est C_{n-2}

Le nombre qu'on cherche est donc égal à
 $C_{n-1} + C_{n-2}$

On calcule $C_1 = 1$, $C_2 = 2$ ($\binom{1+1}{2}$)

$$C_3 = 3 \quad \left(\binom{1+1+1}{1+2, 2+1} \right) \text{ etc}$$

Fibonacci est

$$F_1 = 1 \quad F_2 = 1 \quad , \quad F_3 = 2$$

On en déduit que $C_n = F_{n+1}$

- b)
- De même, supposons que le dernier point de la coupe est 2 on obtient D_{n-2}
si est ≥ 3 on ~~obtient~~ ^{peut enlever 1 et on} ~~obtient~~ ^{trouve} les coups de $n-1 \rightarrow D_{n-1}$

Donc $D_n = F_{n-1}$



Donc $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$

Concl. initiales: $D_0 = D_1 = 0$ $D_2 = 1$

$D_3 = 1$, $D_4 = 2$

EX 4

$$a) \prod_{i \geq 1} \frac{1}{(1-xq^i)} = \sum_{d \in \mathcal{P}or} x^{l(d)} q^{|d|}$$

supp que $d = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots k^{m_k})$

alors $l(d) = m_1 + m_2 + \dots + m_k$ et

$$|d| = 1 \cdot m_1 + 2m_2 + \dots + km_k$$

On obtient que

$$\sum_{\substack{d \in \mathcal{P}or \\ \text{avec plus grande} \\ \text{part } k}} x^{l(d)} q^{|d|} = \sum_{m_1 \geq 0} x^{m_1} q^{m_1} \cdot \sum_{m_2 \geq 0} x^{2m_2} q^{2m_2} \dots$$

$$\dots \sum_{m_k \geq 0} x^{km_k} q^{km_k}$$

$$= \frac{1}{(1-xq)} \cdot \frac{1}{(1-xq^2)} \dots \frac{1}{(1-xq^k)}$$

Comme dans $\mathcal{P}or$ on peut avoir plus grande part $\rightarrow +\infty$ on obtient

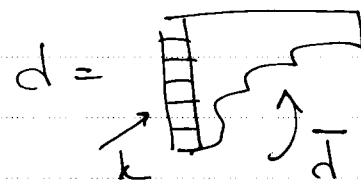
$$\sum_{d \in \mathcal{P}or} x^{l(d)} q^{|d|} = \frac{1}{\prod_{h \geq 1} (1-xq^h)}$$

D'autre côté, on peut calculer $\sum_{d \in \mathcal{P}or} x^{l(d)} q^{|d|}$

comme suit: supp. que $l(d) = k$

alors

$$\sum_{\substack{d \in \mathcal{P}or: \\ l(d)=k}} q^{|d|} = q^k \cdot \sum_{\substack{d: \\ l(d) \leq k}} q^{|d|}$$



or on a calculé $\sum_{d \in \mathcal{P}or} q^{|d|} = \frac{1}{(1-q) \dots (1-q^k)}$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{d \\ \ell(d)=k}} q^{|\mathcal{d}|} = \frac{q^k}{(1-p) \dots (1-q^k)}$$

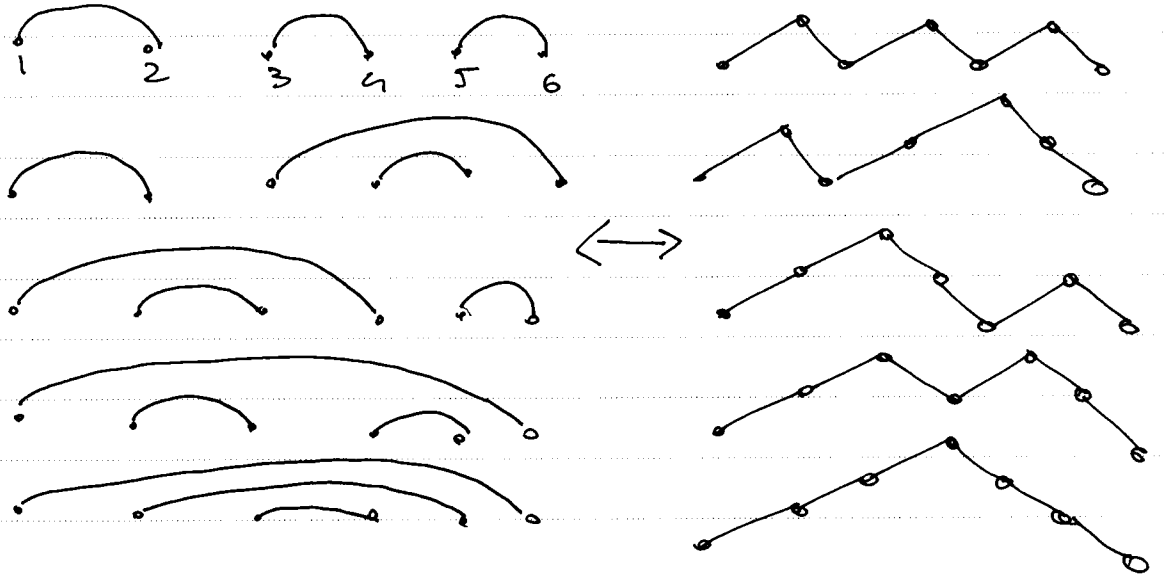
or comme la longueur n'est pas bornée il faut sommer sur tout $k \geq 0$

$$\sum_{k \geq 0} \left(\sum_{\substack{d \\ \ell(d)=k}} x^k q^{|\mathcal{d}|} \right) = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k q^k}{\prod_{i=1}^k (1-q^i)}$$



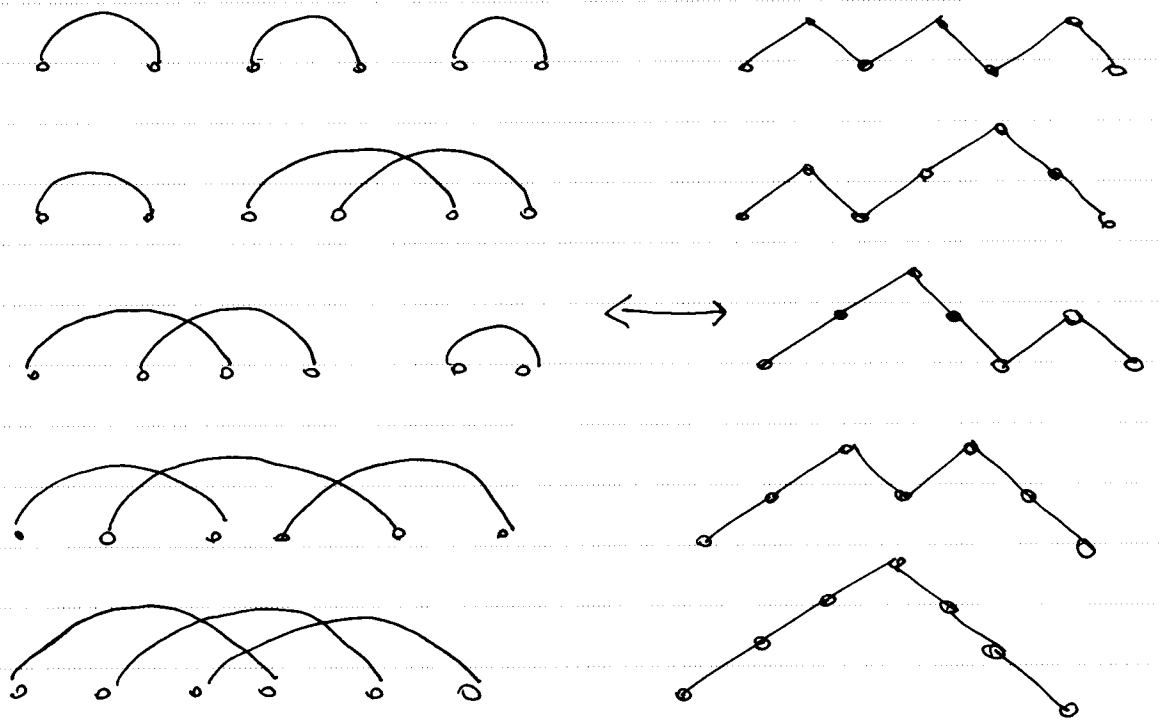
EX 5

Couplages parfaits sans croisements | $n=3$



1^{ère} bijection

Couplage sans emboîtements | $n=3$



2^{ème} bijection.

La bijection est toujours la même
de que il y a un sommet ↙
vous associez un pas ↗ dans
le chemin de Dyck

De que il y a un ~~pas~~ sommet ↘
vous associez un pas ↙ dans
le chemin de Dyck.

Il reste à montrer que cela est
une bijection.