

## Corrigé exercices 7 et 10 feuille 2

**Sous-groupes.** Une partie  $H$  d'un groupe  $G$  est un sous-groupe de  $G$  si

- $H$  est non vide ;
- pour tout  $h_1, h_2 \in H$  le produit  $h_1 h_2 \in H$  ;
- pour tout  $h$ , l'inverse  $h^{-1} \in H$ .

Les trois conditions précédentes sont équivalentes aux deux conditions suivantes (exercice) :

- $H$  est non vide ;
- pour tout  $h_1, h_2 \in H$  le produit  $h_1 h_2^{-1} \in H$ .

**Exercice 2.7** 1. Montrer que, si  $\{H_i, i \in I\}$  est une famille de sous-groupes de  $G$ , alors  $\bigcap_{i \in I} H_i$  est un sous-groupe de  $G$ .

$\bigcap_{i \in I} H_i$  est non vide car l'élément neutre de  $G$  est dans tous les sous-groupes  $H_i$ . Soient  $h, k$  deux éléments de  $\bigcap_{i \in I} H_i$ . Alors pour tout  $j \in I$ ,  $hk^{-1} \in H_j$  car  $H_j$  est un sous-groupe de  $G$ , d'où  $hk^{-1} \in \bigcap_{i \in I} H_i$ . L'ensemble  $\bigcap_{i \in I} H_i$  est donc un sous-groupe de  $G$ .

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'union de deux sous-groupes de  $G$  soit un sous-groupe de  $G$ .

Soient  $H$  et  $K$  deux sous-groupes. Montrons qu'il est nécessaire que  $H \subseteq K$  ou  $K \subseteq H$  pour que  $H \cup K$  soit un sous-groupe de  $G$ . Sinon il existerait  $h \in H \setminus K$  et  $k \in K \setminus H$ . Mais alors  $hk \notin H$  car  $h^{-1}hk = k \notin H$ . De même  $hk \notin K$ , donc  $H \cup K$  ne serait pas un sous-groupe. Réciproquement la condition  $H \subseteq K$  ou  $K \subseteq H$  est évidemment suffisante.

3. Soit  $G$  un ensemble non vide muni d'une loi associative et d'un élément  $1$  tels que pour tout  $g$  de  $G$ ,  $1g = g$  et il existe  $h \in G$  tel que  $hg = 1$ . Montrer que  $G$  est un groupe.

Soit  $g \in G$ . Par hypothèse il existe  $h \in G$  tel que  $hg = 1$ . Vérifions que  $gh = 1$ . On a  $hgh = 1h = h$ . Soit  $k \in G$  tel que  $kh = 1$ . Alors  $1 = kh = khgh = 1gh = gh$ . De plus  $g1 = ghg = 1g = g$ .

On a donc montré que  $1$  était un élément neutre et que tout élément avait un symétrique.

4. Montrer que, si  $H$  est une partie finie non vide d'un groupe  $G$  telle que pour tout  $x, y \in H$   $xy \in H$ , alors  $H$  est un groupe.

Soit  $h \in H$ . Alors  $\{h^m : m > 0\}$  est une partie de  $H$ . Comme  $H$  est fini, il existe  $m_1 < m_2$  tels que  $h^{m_1} = h^{m_2}$ . Mais alors  $h^{m_2 - m_1 - 1}$  est l'inverse de  $h$  et appartient à  $H$ .

5. Montrer que, si  $K, H$  sont deux sous-groupes de  $G$  alors  $HK = \{hk, h \in H, k \in K\}$  est un sous-groupe de  $G$  si et seulement si  $HK = KH$ .

Notons que  $HK$  contient toujours l'élément neutre. Supposons que  $HK$  soit un sous-groupe de  $G$ . Soient  $h \in H$  et  $k \in K$ . Alors  $kh = (h^{-1}k^{-1})^{-1} \in HK$  car  $HK$  est un sous-groupe. Donc  $KH \subseteq HK$ . On a par ailleurs  $(hk)^{-1} = h'k'$  pour un  $h' \in H$  et un  $k' \in K$  car  $(hk)^{-1} \in HK$ . Donc  $hk = k'^{-1}h'^{-1} \in KH$ . On en déduit que  $HK = KH$ .

Réciproquement, supposons que  $HK = KH$ . Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $HK$ . Alors  $x = h_1k_1$  et  $y = h_2k_2$ . D'où  $xy^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2$ . Comme  $k_1k_2^{-1}h_2 \in KH = HK$ , il existe  $h' \in H$  et  $k' \in K$  tel que  $k_1k_2^{-1}h_2 = h'k'$ . D'où  $xy^{-1} = h_1h'k' \in HK$ .

6. Montrer qu'un groupe dont le carré de chaque élément égale le neutre est abélien.

Soient  $a, b$  deux éléments du groupe. Alors

$$ba = (ab)^2ba = ababba = abab^2a = abaa = aba^2 = ab.$$

**Exercice 2.10** 1. Donner un exemple de morphisme de groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  vers  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ . Est-ce un isomorphisme ?

Considérons l'application exponentielle  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$   
 $x \mapsto e^x$ . Cette application est un homomorphisme de groupes car  $\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)$  pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ . Cet homomorphisme est injectif car l'application exponentielle est strictement croissante. Ce n'est pas un isomorphisme car  $\text{Im}(\exp) = \mathbb{R}^{+*}$ .

2. L'ensemble des bijections croissantes de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est-il un groupe ?

Montrons que la composée de deux bijections croissantes  $f$  et  $g$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est encore croissante. Soit  $x, y \in \mathbb{R}$  tel que  $x \leq y$ . Alors  $f(x) \leq f(y)$  et donc  $g(f(x)) \leq g(f(y))$ , c'est-à-dire  $g \circ f(x) \leq g \circ f(y)$ .

Cet ensemble est non vide car il contient l'identité.

Montrons que la bijection réciproque d'une bijection croissante  $f$  l'est également. Soit  $x, y \in \mathbb{R}$  tel que  $x \neq y$ . Si  $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$  alors  $x < y$  car  $f$  est strictement croissante en tant que bijection croissante. Par disjonction des cas il suit que  $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$  si et seulement si  $x < y$ . L'ensemble des bijections croissantes de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  forme donc un sous-groupe du groupe des bijections de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Et pour les décroissantes ?

Considérons la bijection  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = -x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Cette fonction est décroissante mais l'application  $f \circ f$  vaut l'identité qui n'est pas décroissante. Donc l'ensemble des bijections décroissantes de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  ne forme pas un groupe. (En fait il suffit de remarquer que l'identité n'est pas décroissante pour conclure que cet ensemble n'est pas un groupe car l'élément neutre pour la composition est nécessairement l'identité.)

3. Est-il possible de définir une loi  $*$  sur l'ensemble des entiers positifs  $\mathbb{N}$  de façon à ce que  $(\mathbb{N}, *)$  devienne un groupe ?

Oui, il suffit de considérer une bijection entre  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{N}$  et de transporter la loi de groupe additive de  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{N}$  via cette bijection. Par exemple considérons la bijection

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0 \\ -2n - 1 & \text{si } n < 0 \end{cases} .$$

Alors on peut définir l'opération  $*$  de la façon suivante : pour tout  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ ,

$$m_1 * m_2 = f(f^{-1}(m_1) + f^{-1}(m_2)).$$

On obtient ainsi une loi de groupe sur  $\mathbb{N}$ .