2. Groupes : sous-groupes, ordre, premiers exemples

Exercice 2.1 Donner des exemples de groupes infinis commutatifs, de groupes infinis non commutaifs, de groupes finis commutatifs, de groupes finis non commutatifs.

Exercice 2.2
1. Quels sont les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$?
2. Déterminer tous les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ contenant $12\mathbb{Z}$.
3. Soient $m, n \geq 1$. Que vaut $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$?

> **Ordre d'un groupe, ordre d'un élément.** Un groupe G est d'*ordre* n s'il contient n éléments. L'ordre d'un élément $x \in G$ est le plus petit entier strictement positif m tel que $x^m = 1$ (en notation multiplicative). Si un tel entier m n'existe pas, on dit que x est d'ordre infini.

Exercice 2.3
1. Donner un exemple de groupe commutatif G et de deux éléments $a, b \in G$ tous deux d'ordre 4 tels que le produit ab soit d'ordre 1 ? d'ordre 2 ? d'ordre 4 ?
2. En général, montrer que dans un groupe commutatif G, si ordre$(a) = n$ et ordre$(b) = m$ alors ordre(ab) divise ppcm(ordre(a),ordre(b)).
3. Est-il possible d'avoir un groupe G et deux éléments $x, y \in G$ d'ordre 2 tel que $x \cdot y$ soit d'ordre infini (si oui, donner un exemple ; si non, donner un court argument) ?
4. Est-il possible d'avoir un groupe infini dont tous les éléments sont d'ordre fini ?

Exercice 2.4 (Avril 2005)
1. Soient x et y deux éléments d'ordres finis, premiers entre eux, d'un groupe commutatif G. Montrer que l'ordre de xy est égal au produit des ordres de x et y.
2. Soit y un élément de G d'ordre $p^\alpha m$ où m est un entier et p est premier. Montrer que y^m est d'ordre p^α.
3. Soit G un groupe commutatif de cardinal fini n. Montrer qu'il existe un élément de G dont l'ordre est le ppcm des ordres des éléments de G.
4. Calculer l'ordre de chaque élément du groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le résultat de la question 3 est-il vérifié ?
5. Calculer l'ordre de chaque élément du groupe S_3. Le résultat de la question 3 est-il vérifié ?

Exercice 2.5 Soit n un entier strictement positif.

a) Montrer que tout sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est cyclique. (On pourra pour cela utiliser le morphisme $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui a un entier k associe sa classe dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$). En déduire que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.

b) Montrer que pour tout d divisant n, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède un unique sous-groupe d'ordre d.
Indication : considérer l'ensemble

$$H := \{\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : \overline{dk} = \bar{0}\}.$$

c) Montrer que le nombre d'éléments d'ordre d dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est égal à $\varphi(d)$.

d) En déduire une nouvelle démonstration de la relation

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

Exercice 2.6 a) Soit G un groupe fini d'ordre n tel que pour tout diviseur d de n, il y ait au plus d éléments g de G vérifiant $g^d = 1$. Montrer que G est cyclique.

b) Montrer que pour tout p premier, le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est cyclique.

Exercice 2.7

1. Montrer que, si $\{H_i, i \in I\}$ est une famille de sous-groupes de G, alors $\cap_{i\in I} H_i$ est un sous-groupe de G.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'union de deux sous-groupes de G soit un sous-groupe de G.
3. Soit G un ensemble non vide muni d'une loi associative et d'un élément 1 tels que pour tout g de G, $1g = g$ et il existe $h \in G$ tel que $hg = 1$. Montrer que G est un groupe.
4. Montrer que, si H est une partie finie non vide d'un groupe G telle que pour tout $x, y \in H$ $xy \in H$, alors H est un groupe.
5. Montrer que, si K, H sont deux sous-groupes de G alors $HK = \{hk, h \in H, k \in K\}$ est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.
6. Montrer qu'un groupe dont le carré de chaque élément égale le neutre est abélien.

Exercice 2.8 Soit $\mathbb{H}_8$ le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ et } K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Calculer l'ordre de $\mathbb{H}_8$ et expliciter tous ses sous-groupes. Quel est son centre ?

Exercice 2.9 On note D_4 le groupe des isométries du carré pour la composition des applications (on l'appelle le quatrième groupe diédral, d'où la notation). Quel est l'ordre de ce groupe ? Quel est l'ordre de chacun de ses éléments ? Est-ce un groupe cyclique ? Est-ce un groupe commutatif ?

Exercice 2.10

1. Donner un exemple de morphisme de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{R}^*, .)$. Est-ce un isomorphisme ?
2. L'ensemble des bijections croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-il un groupe ? Et pour les décroissantes ?
3. Est-il possible de définir une loi $*$ sur l'ensemble des entiers positifs $\mathbb{N}$ de façon à ce que $(\mathbb{N}, *)$ devienne un groupe ?

Exercice 2.11

1. Donner deux exemples de groupes d'ordre 4 non isomorphes entre eux.
2. Donner deux exemples de groupes d'ordre 6 non isomorphes entre eux.
3. Donner cinq exemples de groupes d'ordre 8 non isomorphes entre eux.

Groupe engendré. Soit G un groupe et S une partie de G. On note $\langle S\rangle$ le plus petit sous-groupe de G contenant S. On dit que $\langle S\rangle$ est le sous-groupe engendré par S. Si $\langle S\rangle = G$, on dit que S est une partie génératrice de G.

Exercice 2.12 Donner une partie génératrice la plus petite possible du groupe $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Y a-t-il plusieurs choix possibles ? Mêmes questions pour les groupes S_3, $\mathbb{H}_8$ et $\mathbb{Z}^n$.

Exercice 2.13 a) Donner un exemple de sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ dense de type fini (c'est-à-dire engendré par un nombre fini d'éléments).

b) Tous les sous-groupes de $\mathbb{R}$ sont-ils de type fini ?

c) Montrer que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont soit monogènes soit denses.