4. Groupe symétrique S_n

Décomposition canonique. Toute permutation s'écrit comme composée de cycles de supports deux à deux disjoints. Cette écriture est unique à l'ordre des facteurs près.

Exercice 4.1 Soient $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ deux permutations de S_5.

1. Décomposer sous forme canonique σ et τ.
2. Calculer sous forme canonique $\sigma \circ \tau$, $\sigma^2 \circ \tau$, $\sigma \circ \tau^{-1}$.
3. Quel est l'ordre d'un cycle $(i_1\ i_2\ \ldots\ i_m)$?
4. Quel est l'ordre d'un produit $c_1 \circ c_2 \circ \cdots \circ c_k$ de cycles à supports deux à deux disjoints en fonction des ordres des cycles c_i ?
5. Quels sont les ordres de τ, σ, $\sigma \circ \tau$, $\sigma^2 \circ \tau$, $\sigma \circ \tau^{-1}$?

Exercice 4.2

1. Soit $c = (i_1\ i_2\ \ldots\ i_m)$ un cycle dans S_n et σ une pemutation de S_n. Montrer que
$$\sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\ \sigma(i_2)\ \ldots\ \sigma(i_m)).$$
2. En déduire que que deux cycles sont conjugués si et seulement s'ils ont le même ordre.
3. Montrer que deux permutations sont conjugués si et seulement les ordres des cycles dans leurs décompositions canoniques coïncident.
4. Trouver une permutation $\sigma \in S_8$ tel que
$$\sigma(1\ 7\ 2)(3\ 5)(4\ 8)\sigma^{-1} = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6\ 7).$$

Exercice 4.3

1. Montrer que tout élément $\sigma \in S_n$ est conjugué à son symétrique σ^{-1}.
2. Soit $\tau = (1\ 2\ 3\ 4)$ dans S_4, expliciter la conjugaison entre τ et τ^{-1}.

Exercice 4.4 On note :
$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$s' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 7 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Ces deux permutations sont-elles conjuguées dans S_7 ?
2. Posons $s_1 = (3\ 5)s'$, $s_2 = (5\ 7)s'$. Ces deux permutations sont-elles conjuguées à s ?

Exercice 4.5

1. Combien y a-t-il de classes de conjugaison dans S_5 ?
2. Quels sont les ordres possibles pour un élément de S_5 ?
3. Pour chacun des éléments suivants de S_8, quel est le cardinal de sa classe de conjugaison
$$(1\ 2),\ (1\ 2\ 3),\ (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 2)(3\ 4\ 5),\ (1\ 2)(3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8)?$$

Exercice 4.6 (L'homomorphisme signature) Soit $\sigma \in S_n$. On appelle σ-orbite de $i \in \{1, \ldots, n\}$ l'ensemble $\{\sigma^k(i) \ : \ k \in \mathbb{N}\}$, que l'on notera $\Omega_\sigma(i)$. On pose $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{n-r}$ où r est le nombre de σ-orbites distinctes.

1. Montrer que si c est un cycle d'ordre m alors $\operatorname{sgn}(c) = (-1)^{m-1}$.
2. Montrer que si τ est une transposition alors $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = -\operatorname{sgn}(\sigma)$. (Indication : si $\tau = (i\ j)$, on vérifie que
   - si $\Omega_\sigma(i) \neq \Omega_\sigma(j)$ alors $\Omega_{\sigma\circ\tau}(i) = \Omega_\sigma(i) \cup \Omega_\sigma(j)$,
   - si $\Omega_\sigma(i) = \Omega_\sigma(j)$ alors $\Omega_{\sigma\circ\tau}(i)$ et $\Omega_{\sigma\circ\tau}(j)$ sont disjoints et $\Omega_\sigma(i) = \Omega_{\sigma\circ\tau}(i) \cup \Omega_{\sigma\circ\tau}(j)$,
   - si $k \notin \Omega_\sigma(i) \cup \Omega_\sigma(j)$ alors $\Omega_{\sigma\circ\tau}(k) = \Omega_\sigma(k)$.
3. En déduire que sgn définit un homomorphisme de groupes de S_n vers le groupe $(\{1, -1\}, \times)$.
4. On note A_n l'ensemble des permutations de S_n de signatures postives. Rappeler pourquoi A_n est un sous-groupe distingué de S_n. Quel est l'ordre de A_n ?
5. Montrer que les 3-cycles engendrent A_n pour $n \geq 3$.

Exercice 4.7 (Juin 2003) On considère dans S_7 :

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Ecrire π comme produit de cycles disjoints.
2. En déduire la signature et l'ordre de π.
3. Combien y-a-t'il d'éléments dans S_7 conjugués avec π ?

Exercice 4.8 (Novembre 2008) On considère les deux permutations dans S_6 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Donner les décompositions en cycles disjoints de σ et τ.
2. Calculer la signature de $\sigma^6\tau^{-7}$.
3. Combien y a-t-il d'éléments de S_6 qui sont conjugués à σ ?
4. Expliciter un élément de S_6 qui conjugue σ et $\sigma^{-1}\tau$, si c'est possible.
5. Décomposer $\tau \circ \sigma^{-1}$ en un produit de 3-cycles, si c'est possible.

Exercice 4.9

1. Donner un exemple de sous-groupe d'ordre 2, 3, et 4 du groupe alterné A_4.
2. A_4 admet-il un sous-groupe d'ordre 6 (si oui, donner un exemple ; si non, justifier) ?