5. Actions de groupes

Rappel. Une *action* d'un groupe G sur un ensemble X est la donnée d'une application

$$\begin{array}{rcl} G \times X & \to & X \\ (g,x) & \mapsto & g \cdot x \end{array} \quad \text{vérifiant} \quad \begin{array}{l} e \cdot x = x \text{ pour tout } x \in X; \\ (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) \text{ pour tout } g, h \in G \text{ et tout } x \in X. \end{array}$$

La relation xRy définie sur X par il existe $g \in G$ tel que $y = g \cdot x$ est une relation d'équivalence.

Pour $x \in X$ on appelle *G-orbite* de x la classe d'équivalence $\Omega(x) := \{g \cdot x : \ g \in G\}$.
Le *stabilisateur* de x, $\mathrm{Stab}(x) := \{g \in G : \ g \cdot x = x\}$, est un sous-groupe de G.

Exercice 5.1

1. Soit $G = \left\{ f = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \right\}$. On fait agir G sur $\mathbb{R}^2$ de façon naturelle. Décrire les orbites.
2. On fait agir S_3 sur S_3 par conjuguaison. Décrire les orbites et les stabilisateurs.

Formule des classes. Soit G un groupe opérant sur un ensemble fini X, pour tout $x \in X$ on a l'égalité

$$|\,\Omega(x)| = [G : \mathrm{Stab}(x)].$$

En particulier si G est fini alors

$$|G| = |\,\Omega(x)| \times |\,\mathrm{Stab}(x)|.$$

Enfin si Y est un système de représentants des orbites de X, alors :

$$|X| = \sum_{x \in Y} [G : \mathrm{Stab}(x)].$$

Exercice 5.2

1. Un groupe de 35 éléments opère sur un ensemble de 19 éléments en ne laissant fixe aucun d'eux. Combien y a t-il d'orbites ?
2. Soit G un groupe de $143 = 11 \times 13$ éléments opérant sur un ensemble de 108 éléments. Montrer qu'il existe un point fixe.

Exercice 5.3 Soit G un groupe d'ordre n et q un diviseur de n. On fait agir G sur G par conjuguaison. Montrer que si $g \in G$ est d'ordre q alors $|\,\Omega(g)|$ divise n/q.

Exercice 5.4 En considérant l'action par conjugaison de A_5 sur l'ensemble des $5-$cycles montrer qu'il existe deux classes de conjugaisons de $5-$cycles dans A_5.

Exercice 5.5 Rappelons que pour p un nombre premier, on appelle p-groupe un groupe dont le cardinal est une puissance de p. Le but de cet exercice est de démontrer que le centre d'un p-groupe n'est pas réduit à l'élément neutre.

1. Soit G un p-groupe opérant sur un ensemble X, notons X^G l'ensemble des points fixes de X sous G, c'est-à-dire $X^G = \{x \in X \text{ tel que } g \cdot x = x \text{ pour tout } g \in G\}$.
   Montrer que $|X| \equiv |X^G| \pmod{p}$.
   Indication : écrire X comme réunion disjointe de ses orbites sous l'action de G.
2. Conclure : présenter le centre du groupe comme les points fixes sous une action convenable de G. (Préciser l'action et l'ensemble sur lequel G agit).

Exercice 5.6 Soit G un groupe fini qui opère sur un ensemble fini S. Pour tout $g \in G$, on pose :

$$S^g = \ \{s \in S \text{ tel que } g \cdot s = s\}.$$

1. Démontrer la formule $\sum_{s \in S} |\operatorname{Stab}(s)| = \sum_{g \in G} |S^g|$.
   (Indication : considérer l'ensemble $E = \{(g, x) \in G \times X : \ g \cdot x = x\}$.)
2. En déduire la formule de Burnside :

$$|G| \times (\text{nombre d'orbites}) = \sum_{g \in G} |S^g|.$$

Exercice 5.7 (Inspiré d'un extrait du sujet de Juin 2007) On assemble des molécules triatomiques modélisées sous la forme d'un triangle équilatéral, les atomes étant situés sur les sommets. On suppose qu'on a pour cela à disposition q-types d'atomes (les atomes d'un même type étant identiques). Le but de cet exercice est de dénombrer le nombre de molécules différentes que l'on peut assembler.

1. Dénombrer le nombre de molécules différentes formées de trois atomes de même type.
2. Dénombrer le nombre de molécules différentes dont deux des trois atomes ont même type et le troisième un type différent.
3. Dénombrer le nombre de molécules différentes dont les trois atomes sont de types différents.
4. En déduire que le nombre de molécules différentes que l'on peut assembler est

$$\frac{q^3}{6} + \frac{q^2}{2} + \frac{q}{3}.$$

5. Retrouver ce résultat en faisant agir le groupe des isométries du triangle équilatéral sur l'ensemble des triangles typés (un triangle typé étant une application de l'ensemble des sommets du triangle équlatéral vers l'ensembles des types). (Indication : appliquer la formule de Burnside.)

Exercice 5.8 Soit G le groupe des isométries directes de $\mathbb{R}^3$ préservant un cube.

1. Montrer que G contient au moins 24 éléments.
2. Montrer que G est isomorphe à S_4. (Indication : considérer l'action de G sur les quatre diagonales du cube.)
3. Décrire géométriquement les classes de conjugaison de G.
4. A l'aide de la formule de Burnside, déterminer le nombre de façons de colorier les faces d'un cube avec au plus trois couleurs à disposition. Indication : considérer l'action de G sur l'ensemble des coloriages des faces du cube (un coloriage des faces étant la donnée d'une application de l'ensemble des six faces vers l'ensemble des couleurs).

Exercice 5.9 1. Rappeler les énoncés des théorèmes de Sylow.

2. Soit G un groupe d'ordre 133. Montrer que G possède un unique sous-groupe H d'ordre 19 et que ce sous-groupe H est distingué.
3. Montrer que G possède un unique sous-groupe K d'ordre 7 et que ce sous-groupe est distingué.
4. Soit x un générateur de H et y un générateur de K. Montrer que x et y commutent. (Indication : montrer que l'élément $xyx^{-1}y^{-1}$ est dans $H \cap K$.)
5. En déduire que G est cyclique.