6. Anneaux

Exercice 6.1 Donner des exemples de corps K : (i) fini, (ii) dénombrable, (iii) tel que tout polynôme dans $K[X]$ admette une racine, (iv) avec aucune des trois propriétés précédentes.

Exercice 6.2
1. Trouver deux polynômes distincts dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$ qui définissent la même fonction de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. Si K est un corps infini, montrer que deux polynômes distincts dans $K[X]$ définissent des fonctions distinctes de K dans K.

Exercice 6.3
1. Donner un exemple de polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ sans racine réelle.
2. Montrer que tout polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair admet au moins une racine réelle.

Rappel : Idéal
Soit A un anneau commutatif. On dit que $I \subset A$ est un idéal si I est un sous-groupe additif de A et si $\forall x \in I, \forall y \in A$, on a $xy \in I$.

Exercice 6.4 Déterminer le PGCD de $X^3 + 4X^2 + 4X + 3$ et $X^3 + 5X^2 + 8X + 6$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6.5 On considère l'anneau $\mathbb{R}[X]$.
1. Déterminer l'idéal J engendré par les polynômes X^3+3X^2+4X+2 et $X^4+2X^3+3X^2+2X+2$.
2. Donner un isomorphisme entre l'anneau quotient $\mathbb{R}[X]/J$ et le corps $\mathbb{C}$.

Exercice 6.6 On considère dans l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ les idéaux I, J engendrés par $2X$ et X^3, et par $3X$ et $X^2 + 1$ respectivement.
1. Montrer que $X^3 - 2X \in I \cap J$.
2. Montrer que $I + J = \mathbb{Z}[X]$. En déduire que $X^3 - 2X \in IJ$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de polynômes $P \in I$ et $Q \in J$ tels que $X^3 - 2X = PQ$.

Rappel : Morphisme d'anneaux
Soient A et B deux anneaux. On dit que $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux si pour tous $x, y \in A$ on a
1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$;
2. $f(xy) = f(x)f(y)$;
3. $f(1) = 1$.

Exercice 6.7
1. Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneau de $\mathbb{Z}$ vers un anneau donné A.
2. Soit A un anneau. Que peut-on dire d'un idéal qui contient 0 ? et d'un idéal qui contient 1 ?
3. Soient F un corps, A un anneau. Pourquoi tout morphisme d'anneaux $\phi : F \to A$ est-il injectif ?

Exercice 6.8 Déterminer tous les morphismes d'anneaux de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, puis de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}$, et finalement de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 6.9 Etablir les isomorphismes suivants :
1. $K[X]/(X - \alpha) \cong K$, où K est un corps et $\alpha \in K$.
2. $\mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1) \cong \mathbb{Z}[i]$.

3. $K[X,Y]/(X-\alpha) \cong K[Y]$ où K est un corps et $\alpha \in K$.
4. $K[X,Y]/(X-\alpha, Y-\beta) \cong K$ où K est un corps et $\alpha, \beta \in K$.

Exercice 6.10 Montrer que pour p premier l'anneau $\mathbb{Z}[X]/(p)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$.

Exercice 6.11 On note $f(X) = (X-1)(X+1)^2 \in \mathbb{R}[X]$.

1. Est-ce que l'anneau quotient $A = \mathbb{R}[X]/(f(X))$ est intègre ?
2. Déterminer tous les éléments de A tels que $a^2 = 0$.
3. Montrer que si $a^3 = 0$, alors $a^2 = 0$.
4. Montrer que A n'est isomorphe ni à l'anneau quotient $\mathbb{R}[X]/(X^3)$, ni à $\mathbb{R}[X]/(X^3-1)$.
5. Déterminer l'idéal I de $\mathbb{R}[X]$ engendré par les deux polynômes $f(X)$ et X^3-1. Déterminer l'anneau quotient $\mathbb{R}[X]/I$.

Exercice 6.12 On travaille dans l'anneau des polynômes $\mathbb{Q}[X]$.

1. Déterminer si $P = 3X^3 + 2X^2 + X + 4$ est irréductible.
2. Soit $Q = X^2 - 1$. Trouver deux polynômes U et V tels que $UP + VQ = 1$.

Exercice 6.13 Déterminer si les polynômes suivants sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$:

$$4X^3 - 3X - \frac{1}{2} \ ; \quad X^6 - 3X^3 + 12X - 3 \ ; \quad X^n - 2 \text{ avec } n \geq 1.$$

Exercice 6.14 Montrer que pour p un nombre premier, le polynôme

$$P = X^{p-1} + X^{p-2} + ... + X + 1 = \frac{X^p - 1}{X - 1}$$

est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Indication : supposer que $P(X)$ admet une factorisation sur $\mathbb{Z}$, et obtenir une contradiction en réduisant modulo p.

Rappel : Anneau euclidien, principal, factoriel.
Soit A un anneau commutatif intègre. On a les implications :
A euclidien $\Longrightarrow$ A principal $\Longrightarrow$ A factoriel

Exercice 6.15 On appelle *entier de Gauss* tout nombre complexe de la forme $z = x + iy$ avec x, y des entiers relatifs.

1. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss muni des lois d'addition et de multiplication usuelles est un anneau commutatif intègre. Est-ce un corps ?
2. Montrer que l'anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien (utiliser la fonction $N(z) = z\bar{z}$).
3. Trouver un pgcd et une relation de Bézout pour $-1 + 13i$ et $4 + i$. Même question pour $8 + 26i$ et $1 + 17i$.

Exercice 6.16 Soit A un anneau principal.

1. Montrer que pour tout $a, b \in A$ il existe un PGCD de a et b et que l'on peut écrire une relation de Bézout.
2. Si $a, b \in A$ sont premiers entre eux montrer qu'on a un isomorphisme

$$A/(ab) \simeq A/(a) \times A/(b).$$

Exercice 6.17 Montrer l'isomorphisme

$$\mathbb{R}[X]/(X^2 - 3X + 2) \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Cet anneau est-il un corps ?

Exercice 6.18 Soit p un nombre premier. Déterminer tous les diviseurs de zéro de l'anneau $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

Exercice 6.19 Soit $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ le sous anneau de $\mathbb{R}$ engendré par 1 et $\sqrt{2}$.

1. Montrer que tout x de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ s'écrit, de manière unique, sous la forme $x = a+b\sqrt{2}$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^*$ si et seulement si $a^2 - 2b^2 = \pm 1$.
3. Montrer que le groupe $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^*$ est engendré par -1 et $1 + \sqrt{2}$.

Exercice 6.20 (mai 2005) On note $\mathbb{D} = \left\{\frac{n}{10^k} \mid n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\right\}$ l'ensemble des décimaux.

1. Vérifier que $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
2. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{D}$. Est-ce que $\mathbb{D}$ est un corps ?
3. Montrer que pour tout $d \in \mathbb{D}$, $d \neq 0$, il existe un unique couple $(d', v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que
$$d = d'\ 10^v \quad \text{et} \quad 10 \not| d'.$$
Lorsque ces conditions sont satisfaites, on note : $\phi(d) = |d'|$. On convient que $\phi(0) = 0$.
4. Montrer que $\mathbb{D}$ est un anneau euclidien.
5. Donner des générateurs aussi simple que possible de l'idéal de $\mathbb{D}$ engendré par $\frac{46}{10}$ et $\frac{12}{100}$

Exercice 6.21 (juin 2005) 1. Déterminer si le polynôme $P = X^3 - 5X^2 + 11X - 4$ est réductible dans $Q[X]$.

2. On considère le polynôme P comme un polynôme $\bar{P}$ sur le corps $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ en remplaçant ses coéfficients par leurs classes modulo 3.
   (a) Décomposer $\bar{P}$ en facteurs irréductibles dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$.
   (b) Est-ce que l'anneau quotient $A = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]/(P)$ est intègre ? Quel est le nombre d'éléments de A ?
3. (a) Déterminer tous les éléments A tels que $a^2 = 0$.
   (b) Montrer que si $a^3 = 0$, alors $a^2 = 0$.
   (c) Utiliser (a) et (b) pour montrer que A n'est pas isomorphe à l'anneau quotient $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]/(X^3 - \bar{1})$.
   Déterminer l'idéal I de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ engendré par les deux polynômes $\bar{P}$ et $X^3 - \bar{1}$.
   Déterminer l'anneau quotient $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]/I$.
4. Déterminer l'idéal J de $Q[X]$ engendré par P et $X^3 - 1$.

Exercice 6.22 Soit d un nombre entier relatif sans facteur carré, on note $\sqrt{d}$ une racine dans $\mathbb{C}$ de l'équation $X^2 - d = 0$. On pose $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est un anneau intègre.
2. Pour $x = a + b\sqrt{d}$ dans $\mathbb{Z}(\sqrt{d})$ on note $N(x) = a^2 - b^2 d = (a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d})$.
   Montrer que pour tout x, x', $N(xx') = N(x)N(x')$.
3. En déduire qu'un élément x est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ssi $N(x) = \pm 1$.
4. On travaille dans l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$. Montrer que 2, $3 - \sqrt{13}$ et $-3 - \sqrt{13}$ sont irréductibles. En déduire que $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$ n'est pas factoriel.

5. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ n'est pas factoriel.

Exercice 6.23 Le but de cet exercice est de montrer que l'anneau $A = \mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}]$ est principal mais non euclidien.

1. Montrer que l'anneau A est isomorphe à l'anneau $\mathbb{Z}[X]/(X^2 - X + 5)$, puis que $X^2 - X + 5$ est irréductible dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ et en déduire que (2) est un idéal maximal de A.
2. Montrer que pour tout couple (a, b) d'éléments non nuls de A, il existe un couple (q, r) d'éléments de A tel que (en notant $N(z) = z\bar{z}$) :
   $a = bq + r$ ou $2a = bq + r$,
   $r = 0$ ou $N(r) < N(b)$.
3. Montrer que A est principal.
4. Montrer que ± 1 sont les seuls inversibles de A.
5. En déduire que A n'est pas euclidien (montrer d'abord que dans un anneau euclidien B, il existe $x \in B$ non inversible tel que tout élément du quotient $B/(x)$ puisse s'écrire $\bar{y}$ avec $y \in B$ inversible.)

Exercice 6.24 Dans l'anneau factoriel $\mathbb{R}[X, Y]$, trouver un PGCD de $X^3Y + X^2Y^2 - X^2Y + X^2 + XY + Y - 1$ et $X^3Y^2 + XY - X - 1$ et en déduire une factorisation de chacun de ces polynômes en irréductibles de $\mathbb{R}[X, Y]$.