Licence de mathématiques L3 14 janvier 2010
Université Claude Bernard (Lyon 1)
Département de Mathématiques - U.F.R. Sciences et technologies

Algèbre et théorie des nombres

Examen

Durée : 3 heures

Ni document ni calculatrice. Le barême sur 40 points est indicatif.
Un corrigé sera disponible sur la page `http ://math.univ-lyon1.fr/~blossier/ATN`

I - Arithmétique (4 points)

La comète A qui est visible exactement tous les 26 ans a été observée il y a 4 ans. La comète B qui est visible exactement tous les 14 ans a été observée il y a 10 ans. Dans combiens d'années pourra-t-on observer simultanément les comètes A et B ?

II - Opération de groupe (12 points).

1. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. Soit n le nombre d'orbites.
   (a) Démontrer la formule de Burnside (à l'aide de la formule des classes) :
   $$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$
   où $X^g = \{x \in X; g \cdot x = x\}$.
   (b) Montrer que si g_1 et g_2 sont deux éléments conjugués de G alors
   $$|X^{g_1}| = |X^{g_2}|.$$
2. Soit $\mathcal{P}$ un pentagone régulier $ABCDE$. On note G le groupe des isométries de ce pentagone et S l'ensemble $\{A, B, C, D, E\}$ des sommets de $\mathcal{P}$. Déterminer l'orbite de A sous l'action de G sur S. Déterminer le stabilisateur de A. En déduire l'ordre de G.
3. Donner un ensemble de générateurs de G constitué de deux éléments. Expliciter un isomorphisme de G vers un sous-groupe de S_5.
4. On se propose de colorier les côtés de $\mathcal{P}$ à l'aide de m couleurs. On considère que deux coloriages sont identiques s'il existe un élément de G qui envoie l'un sur l'autre. En utilisant la première question, montrer que le nombre de coloriages possibles est égal à
   $$\frac{m^5 + 5m^3 + 4m}{10}.$$

III - Questions de cours (6 points)

1. Montrer qu'un anneau euclidien est principal.
2. Soit A un anneau. Montrer que $A[X]$ est principal si et seulement si A est un corps.
3. Donner un exemple d'anneau factoriel qui n'est pas principal.

IV - Polynômes(18 points)

Soient

$$P = X^4 + 5X^3 + 7X^2 + 3X + 5,$$
$$Q = X^4 + 7X^3 + 7X^2 + 5X + 7 \text{ et}$$
$$R = X^4 + 7X^3 + 7X^2 + 3X + 5$$

trois polynômes de $\mathbb{Z}[X]$.

1. Montrer que $X^2 + X + \bar{1}$ est l'unique polynôme irréductible de degré 2 de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$.
2. Calculer $(X^2 + X + \bar{1})^2$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$.
3. En déduire que $X^4 + X^3 + X^2 + X + \bar{1}$ est irréductible dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$.
4. Déduire de la question précédente que P, Q et R sont des polynômes irréductibles de $\mathbb{Q}[X]$.

   Pour la suite, on note $\bar{P}$, $\bar{Q}$ et $\bar{R}$ les polynômes de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$ obtenus par réduction modulo 3 des polynômes P, Q, R. On note A, B et C les anneaux $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]/(\bar{P})$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]/(\bar{Q})$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]/(\bar{R})$.
5. Combien y-a-t-il d'éléments dans chacun des anneaux A, B et C ?
6. Décomposer $\bar{P}$ en facteurs irréductibles.
7. Montrer qu'il existe un élément non nul a de A tel que $a^2 = 0$.
8. Décomposer $\bar{Q}$ en facteurs irréductibles.
9. Les anneaux A et B sont-ils isomorphes ?
10. Montrer que A et C sont isomorphes. On pourra utiliser le morphisme ϕ défini par

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X] & \to & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X] \\ S(X) & \mapsto & S(-X) \end{array}.$$

11. Déterminer l'idéal I engendré par $\bar{P}$ et $\bar{Q}$, puis l'idéal J engendré par $\bar{R}$ et $\bar{Q}$. Les anneaux $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]/I$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]/J$ sont-ils isomorphes ?