Licence STS Mention MATH L3 - ATN
Permutations et groupes de permutations

1 Les permutations

La permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

du groupe symétrique $\mathfrak{S}_9$ admet la décomposition en cycles à supports disjoints ;

$$\sigma = (1, 3, 8)(2, 7)(4, 9, 6, 5)$$

Avec SAGE on peut définir σ à partir de la *liste* $[3, 7, 8, 9, 4, 5, 2, 1, 6]$ ou à partir de la décompo-siiton en cycles représentée par la *liste de tuples* $[(1, 3, 8), (2, 7), (4, 9, 6, 5)]$:

```
sage: sigma = PermutationGroupElement([(1,3,8), (2,7), (4,9,6,5)])
sage: sigma
(1,3,8)(2,7)(4,9,6,5)
sage: sigma_prime= PermutationGroupElement([3, 7, 8, 9, 4, 5, 2, 1, 6])
sage: sigma_prime
(1,3,8)(2,7)(4,9,6,5)
sage: sigma_prime == sigma
True
```

On peut passer de l'une à l'autre de ces représentations :

```
sage: sigma.list()
[3, 7, 8, 9, 4, 5, 2, 1, 6]
sage: sigma_prime.cycles()
[(1,3,8), (2,7), (4,9,6,5)]
```

On peut déterminer l'ordre et la signature de σ :

```
sage: sigma.order()
12
sage: sigma.sign()
1
```

On peut voir σ comme élément du groupe symétrique $\mathfrak{S}_9$:

```
sage: S9 = parent(sigma)
sage: S9
Symmetric group of order 9! as a permutation group
sage: sigma in S9
True
sage: S9.order() == factorial(9)
True
sage: S9.degree()
9
```

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_9$ est engendré par les deux permutations $g_0 = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ et $g_1 = (1, 2)$. On peut trouver une expression de σ en fonction de ces générateurs :

```
sage: g = S9.gens()
sage: g
[(1,2,3,4,5,6,7,8,9), (1,2)]
sage: decomp = sigma.word_problem(g, False)
sage: decomp[0]
'x1^-8*x2*x1^3*x2^-1*x1^-1*x2^-1*x1^-1*x2^-1*x1^3*x2^-1*x1^-1*x2^-1*
x1^-1*x2^-1*x1^2*x2'
sage: x1 = g[0]; x2 = g[1]; x1,x2
((1,2,3,4,5,6,7,8,9), (1,2))
sage: x1^-8*x2*x1^3*x2^-1*x1^-1*x2^-1*x1^-1*x2^-1*x1^3*x2^-1*x1^-1*x2^-1*x1^-1
*x2^-1*x1^2*x2
(1,3,8)(2,7)(4,9,6,5)
```

ATTENTION à l'ordre des facteurs dans un produit de permutations Soient $a, b \in \mathfrak{S}_n$; dans SAGE le produit $a \star b$ calcule la permutation $b \circ a$:

```
sage: a = PermutationGroupElement([(1,2)])
sage: a
(1,2)
sage: b = PermutationGroupElement([(1,2,3)])
sage: b
(1,2,3)
sage: a*b
(1,3)
```

2 Les groupes de permutations

Dans SAGE le groupe symétrique, certains de ses sous-groupes tels que les groupes alternés, diédraux sont pré-définis :

```
sage: S6 = SymmetricGroup(6)
sage: S6
Symmetric group of order 6! as a permutation group
sage: A6 = AlternatingGroup(6)
sage: A6
Alternating group of order 6!/2 as a permutation group
sage: A6.is_normal(S6)
True
sage: S6.quotient_group(A6)
Permutation Group with generators [(1,2)]
sage: A6.is_simple()
True
```

```
sage: D6 = DihedralGroup(6)
sage: D6
Dihedral group of order 12 as a permutation group
sage: D6.list()
[(), (2,6)(3,5), (1,2)(3,6)(4,5), (1,2,3,4,5,6), (1,3)(4,6),
(1,3,5)(2,4,6), (1,4)(2,3)(5,6), (1,4)(2,5)(3,6), (1,5)(2,4),
(1,5,3)(2,6,4), (1,6,5,4,3,2), (1,6)(2,5)(3,4)]
sage: C6 = CyclicPermutationGroup(6)
sage: C6
Cyclic group of order 6 as a permutation group
sage: C6.is_cyclic()
True
sage: C6.is_subgroup(D6)
True
```

On peut obtenir la *table de multiplication* de ces groupes ainsi que le graphe de Cayley :

```
sage: D6.cayley_table()
[ x0  x1  x2  x3  x4  x5  x6  x7  x8  x9 x10 x11]
[ x1  x0  x3  x2  x5  x4  x7  x6  x9  x8 x11 x10]
[ x2 x10  x0  x4  x3  x6  x5  x8  x7 x11  x1  x9]
[ x3 x11  x1  x5  x2  x7  x4  x9  x6 x10  x0  x8]
[ x4  x9 x10  x6  x0  x8  x3 x11  x5  x1  x2  x7]
[ x5  x8 x11  x7  x1  x9  x2 x10  x4  x0  x3  x6]
[ x6  x7  x9  x8 x10 x11  x0  x1  x3  x2  x4  x5]
[ x7  x6  x8  x9 x11 x10  x1  x0  x2  x3  x5  x4]
[ x8  x5  x7 x11  x9  x1 x10  x2  x0  x4  x6  x3]
[ x9  x4  x6 x10  x8  x0 x11  x3  x1  x5  x7  x2]
[x10  x2  x4  x0  x6  x3  x8  x5 x11  x7  x9  x1]
[x11  x3  x5  x1  x7  x2  x9  x4 x10  x6  x8  x0]
sage: Gr = D6.cayley_graph()
sage: show(Gr)
```

On peut considérer un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ engendré par un ensemble fini de permutations.

```
sage: tr = [PermutationGroupElement((i,i+1)) for i in range(1,6)]
sage: tr
[(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)]
sage: S6bis = PermutationGroup(tr)
sage: S6bis
Permutation Group with generators [(5,6), (4,5), (3,4), (2,3), (1,2)]
sage: S6bis.gens()
[(5,6), (4,5), (3,4), (2,3), (1,2)]
sage: S6bis.gens_small()
[(2,6)(3,4,5), (1,4,2)(3,5,6)]
sage: S6 == S6bis
True
```

Voici la liste des groupes de permutations prédéfinis dans SAGE :

a) `SymmetricGroup`, S_n of order $n!$ (n can also be a list X of distinct positive integers, in which case it returns S_X)

b) `AlternatingGroup`, A_n or order $n!/2$ (n can also be a list X of distinct positive integers, in which case it returns A_X)

c) `DihedralGroup`, D_n of order $2n$

d) `CyclicPermutationGroup`, C_n of order n

e) `KleinFourGroup`, subgroup of S_4 of order 4. (Le groupe de Klein peut être vu comme le groupe des isométries d'un losange ou le groupe des isométries d'un rectangle.)

Remarque : le groupe de Klein ci-dessus est un objet de type `permutation group` alors que si l'on considère $C_2 \times C_2$ défini par exemple par le code `AbelianGroup(2,[2,2],'ab')` on obtient un objet de type `Multiplicative Abelian Group` :

```
sage: V = KleinFourGroup()
sage: V
The Klein 4 group of order 4, as a permutation group
sage: V.list()
[(), (3,4), (1,2), (1,2)(3,4)]
sage: A = AbelianGroup(2,[2,2],'ab')
sage: A
Multiplicative Abelian Group isomorphic to C2 x C2
sage: A.list()
[1, b, a, a*b]
sage: V.is_isomorphic(A) #erreur car A n'est pas un groupe de permutations
Traceback (click to the left for traceback)
...
TypeError: right must be a permutation group
sage: G=A.permutation_group() #retourne A comme groupe de permutations
sage: G.list()
[(), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)]
sage: V.is_isomorphic(G)
True
```

3 Les groupes de matrices

Les groupes classiques de matrices sont aussi prédéfinis et sont traités comme des groupes de permutations :

a) `PGL(n,q)`, projective general linear group of $n \times n$ matrices over the finite field `GF(q)`

b) `PSL(n,q)`, projective special linear group of $n \times n$ matrices over the finite field `GF(q)`

c) `PSp(2n,q)`, projective symplectic linear group of $2n \times 2n$ matrices over the finite field `GF(q)`

d) `PSU(n,q)`, projective special unitary group of $n \times n$ matrices having coefficients in the finite field $GF(q^2)$ that respect a fixed nondegenerate sesquilinear form, of determinant 1.

e) `PGU(n,q)`, projective general unitary group of $n \times n$ matrices having coefficients in the finite field $GF(q^2)$ that respect a fixed nondegenerate sesquilinear form, modulo the centre.

4 Exercices

Rappel : utilisez la touche `<TAB>` à la suite du code `objet.` pour afficher la liste des méthodes associées à `objet`. Pour les exercices suivants, vous serez ammené à utiliser des méthodes sur des objets de type “permutation” ou de type “groupes de permutation”.

Exercice 1. Dans le groupe $\mathfrak{S}_7$ les deux permutations suivantes sont-elles conjuguées :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer un élément $g \in \mathfrak{S}_7$ tel que $\tau = g \circ \sigma \circ g^{-1}$. (Rappelons que dans Sage le calcul d'un produit est inversé.)

Exercice 2.
Dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_9$ on considère les cycles $\sigma = (1, 4, 5, 2, 3, 6)$ et $\tau = (7, 6, 5, 8, 9)$.

1. Quelle est la signature de $\pi = \sigma\tau$?
2. Décomposer π en produits de cycles disjoints. Quel est l'ordre de π ?
3. Expliquer pourquoi π^{2001} est produit de trois transpositions disjointes. Calculer ces trois transpositions.

Exercice 3.
On considère la permutation de l'ensemble $\{1, \cdots, 9\}$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Décomposer σ en produits de transpositions $(i, i+1)$ pour $1 \leq i \leq 8$.

Exercice 4.
On considère la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Quel est l'ordre de σ ?
2. Quelle est la signature de σ ?
3. Ecrire une fonction en *python* permettant de calculer le nombre d 'inversions d'une permutation. Quel est le nombre d'inversions de σ. (Une inversion de σ est un couple (i, j) tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. La parité du nombre d'inversions correspond à la signature.)
4. Donner une décomposition de σ en produit de transpositions simples.

Exercice 5.

1. Soit D le groupe diédral d'ordre 8 ;
   (a) Donner des générateurs de D.
   (b) Quel est l'exposant de D ? (On appelle exposant d'un groupe le PPCM des ordres des éléments du groupe. On utilisera ici la méthode ad-hoc de SAGE).
   (c) D est-il abélien ?
   (d) Enumérer les éléments d'ordre 2 de D.
2. Soit Q le sous-groupe de $\mathfrak{S}_8$ engendré par les permutations $a = (1, 2, 5, 4)(3, 8, 6, 7)$ et $b = (1, 8, 5, 7)(2, 3, 4, 6)$.
   (a) Quel est l'ordre de Q ?
   (b) Quel est l'exposant de Q ?
   (c) Q est-il abélien

(d) Enumérer les éléments d'ordre 2 de Q.

3. Les groupes D et Q sont-ils isomorphes ?

Exercice 6.

1. Construire le groupe symétrique $\mathfrak{S}_{11}$ et vérifier que son ordre est 11! (on utilisera que $\mathfrak{S}_{11}$ est engendré par les permutations $t = (1, 2)$ et $c = (2, \cdots, 11, 1)$).
2. (a) Déterminer l'ordre du sous-groupe E de $\mathfrak{S}_{11}$ engendré par $\sigma = (1, 3, 6)(2, 9, 5)(4, 7, 8)$ et $\tau = (1, 4, 5)(2, 3, 7)(6, 8, 9)$.
   (b) Vérifier que E est abélien.
   (c) Déterminer l'ordre de σ et de τ. Qu'en conclure ?
3. On considère les permutations :
$$\begin{array}{rcl} u & = & (1, 3, 7, 4)(2, 8, 5, 6) \\ v & = & (1, 2, 7, 5)(3, 6, 4, 8) \\ w & = & (1, 6, 7, 8)(2, 3, 5, 4) \end{array}$$
   (a) Vérifier que $w = v \circ u$.
   (b) Vérifier que le sous-groupe Q de $\mathfrak{S}_{11}$ engendré par u et v est non abélien d'ordre 8.
   (c) Former la liste des éléments de Q. En déduire que Q est le groupe quaternionique.
4. Soit H le sous-groupe de $\mathfrak{S}_{11}$ engendré par $E \cup Q$; vérifier que $H = Q \rtimes E$.
5. On considère les permutations :
$$g_1 = (1, 6)(3, 4)(7, 8)(9, 10)$$
$$g_2 = (1, 4)(3, 7)(6, 8)(10, 11)$$
   (a) Quel est l'ordre du sous-groupe M_{11} de $\mathfrak{S}_{11}$ engendré par $E \cup Q \cup \{g_1, g_2\}$?
   (b) Combien M_{11} possède-t-il de 11-groupes de Sylow ? (On rappelle que les p-groupes de Sylow sont conjugués. Pour déterminer ce nombre on peut donc utiliser l'action de conjugaison du groupe sur l'ensemble des p-groupes de Sylow et déterminer le stabilisateur d'un élément.)
6. Vérifier que $\{g \in M_{11}/g(11) = 11\}$ est le sous-groupe de $\mathfrak{S}_{11}$ engendré par $H \cup \{g_1\}$.

Exercice 7.

1. Trouver un isomorphisme f entre les groupes $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ et $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_2)$
2. Exprimer les images d'un système générateur de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ par l'isomorphisme f en fonction d'un sustème générateur de $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_2)$. (On pourra utiliser la fonction `map` de SAGE).
3. On considère l'ensemble
$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$
   des 7 *points* et l'ensemble
$$\mathcal{D} = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{5, 6, 1\}, \{6, 7, 2\}, \{7, 3, 1\}\}$$
   des 7 *droites* du *plan de Fano.*
   Donner la liste des éléments du sous-groupe G de $\mathfrak{S}_7$:
$$G = \{\sigma \in \mathfrak{S}_7/D \in \mathcal{D} \Rightarrow \sigma(D) \in \mathcal{D}\}$$
   (On pourra utiliser la commande `Set` afin de transformer des listes en ensembles.)
4. Vérifier que G est isomorphe aux groupes $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ et $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_2)$.
5. Vérifier que ces groupes sont simples.