Devoir 1.

Exercice 1

1. Calculer les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^2 + 3X + 1$.

   Soit α une racine dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^6 + 3X^3 + 1$.

2. Montrer que $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\alpha)$. En déduire que $2/[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.
3. Montrer que $\beta = \alpha + 1/\alpha$ est racine de $X^3 - 3X + 3$. En déduire que $3/[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.
4. Calculer $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ et en déduire que $X^6 + 3X^3 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
5. Déterminer le corps L des racines de $X^6 + 3X^3 + 1$ en fonction de α et $j = \mathrm{e}^{2\pi i/3}$.
6. Calculer $[L : \mathbb{Q}]$.

Exercice 2 Soit L/K une extension algébrique.

1. On suppose qu'il existe x tel que $L = K(x)$. Soit P le polynôme minimal de x sur K.
   a. Soit M un sous-corps de L, contenant K. Montrer qu'il existe un facteur unitaire Q de P dans $L[X]$ tel que M soit engendré sur K par les coefficients de Q.
   b. En déduire que l'extension L/K n'a qu'un nombre fini de sous-extensions.
2. Réciproquement, on suppose que l'extension L/K n'a qu'un nombre fini de sous-extensions.
   a. Montrer que $[L : K]$ est fini.
   b. Si K est infini, montrer que pour tout x, y dans L, il existe $\lambda \in K$ tel que $K(x, y) = K(x + \lambda y)$. En déduire qu'il existe x tel que $L = K(x)$.
   c. Si K est fini, prouver qu'il existe x avec $L = K(x)$. (On rappelle que le groupe multiplicatif d'un corps fini est cyclique.)