Exercice 1

1. Calculer les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme X^2+3X+1.
   Solution. *Les racines sont* $(-3+\sqrt{5})/2$ *et* $(-3-\sqrt{5})/2$.

   Soit α une racine dans $\mathbb{C}$ du polynôme X^6+3X^3+1.
2. Montrer que $\sqrt{5}\in\mathbb{Q}(\alpha)$. En déduire que $2/[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$.
   Solution. α^3 *est racine de* X^2+3X+1. *Donc* $\sqrt{5}\in\mathbb{Q}(\alpha^3)\subset\mathbb{Q}(\alpha)$. *D'où* $2=[\mathbb{Q}(\sqrt{5}):\mathbb{Q}]/[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$.
3. Montrer que $\beta=\alpha+1/\alpha$ est racine de X^3-3X+3. En déduire que $3/[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$.
   Solution. $0=\alpha^6+3\alpha^3+1=\alpha^3(\alpha^3+3+1/\alpha^3)$ *d'où* $\alpha^3+3+1/\alpha^3=0$ *et* $\beta^3=(\alpha+1/\alpha)^3=\alpha^3+1/\alpha^3+3(\alpha+1/\alpha)=-3+3\beta$.
   Par le critère d'Einsentein en $p=3$, X^3-3X+3 *est irréductible sur* $\mathbb{Q}$. *Donc* $[\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}]=3$. *Par conséquent* $3/[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$.
4. Calculer $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ et en déduire que X^6+3X^3+1 est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
   Solution. *Comme* α *est racine de* X^6+3X^3+1, $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]\leq 6$. *D'autre part* $2/[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ *et* $3/[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$, *donc* $6/[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$. *D'où* $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=6$ *et* X^6+3X^3+1 *est irréductible sur* $\mathbb{Q}$.
5. Déterminer le corps L des racines de X^6+3X^3+1.
   Solution. *Soit* δ *une racine. Alors* δ^3 *est racine de* X^2+3X+1 *et donc* $\delta^3=\alpha^3$ *ou* $\delta^3=1/\alpha^3$. *Par conséquent les six racines de* X^6+3X^3+1 *sont* α, $j\alpha$, $j^2\alpha$, $1/\alpha$, j/α *et* j^2/α *et* $L=\mathbb{Q}(\alpha,j)$.
6. Calculer $[L:\mathbb{Q}]$.
   Solution. *On peut supposer* α *réel. Alors il est évident que* $j\notin\mathbb{Q}(\alpha)$ *et comme* $1+j+j^2=0$, *on a* $[\mathbb{Q}(\alpha,j):\mathbb{Q}(\alpha)]=2$. *D'où* $[L:\mathbb{Q}]=[\mathbb{Q}(\alpha,j):\mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=12$.

Exercice 2

1.
   a. *Soient* Q *le polynôme minimal de* x *sur* M *et* N *le corps engendré sur* K *par les coefficients de* Q. *Alors* $N\subsetneq M$ *et* Q *est également le polynôme minimal de* x *sur* N. *Comme* $L=N(x)=M(x)$, *on a* $[L:M]=[L:N]$ *d'où* $M=N$.
   b. *Le polynôme* P *n'a qu'un nombre fini de facteurs dans* $L[X]$ *et donc par a, il n'y a qu'un nombre fini d'extensions intermédiaires.*

2.
   a. *On a* $L=\cup_{x\in L}K(x)$ *mais comme les extensions* $K(x)$ *pour* x *parcourant* L *sont en nombre fini, il existe* $x_1,..,x_n\in L$, *tel que* $L=K(x_1,...,x_n)$. *Du fait que* L *est une extension algébrique, il suit que* $L=K(x_1,...,x_n)$ *est de degré fini sur* K. *(Remarque : l'hypothèse* L *algébrique n'est pas nécessaire ici, elle peut se déduire facilement du fait que* L *n'a qu'un nombre fini d'extensions. En effet s'il y a un élément* x *transcendant sur* K, *on vérifie que les extensions* $K(x^n)$ *sont toutes distinctes.)*
   b. *Puisque* K *est infini et que* L/K *n'a qu'un nombre fini de sous-extensions, il existe* λ_1 *et* λ_2 *deux éléments distincts de* K *tels que :*

   $$K(x+\lambda_1 y)=K(x+\lambda_2 y).$$

   Mais alors, x *et aussi* y *appartiennent à* $K(x+\lambda_1 y)$ *d'où* $K(x+\lambda_1 y)=K(x,y)$.
   On choisit $x\in L$ *tel que* $[K(x):K]$ *soit maximal. En utilisant le résultat précédent, on démontre que si* $K(x)\neq L$ *alors il existe* $x'\in L$ *avec* $K(x)\subsetneq K(x')$, *contradiction.*
   c. *Si* K *est fini, alors* L *est fini et il existe* $x\in L^\times$ *tel que* $L^\times=\langle x\rangle$. *Clairement* $L=K(x)$.