7. Résolubilité par radicaux des équations polynomiales

Exercice 7.1 Un groupe G est dit *résoluble* s'il existe une suite décroissante finie de sous-groupes G_i de G, $0 \leq i \leq n$ telle que
$$\{1\} = G_n \lhd G_{n-1} \lhd \cdots \lhd G_1 \lhd G_0 = G$$
et telle que les quotients G_i/G_{i+1} sont tous abéliens.

1. Montrer que les groupes S_3 et S_4 sont résolubles.
2. Soit K un corps de caractéristique nulle, $a \in K$ et n un entier naturel non nul. Que peut-on dire du groupe de Galois du corps de décomposition de $X^n - a$ sur K ?

Le *sous-groupe dérivé* $D(G)$ de G est le groupe engendré par les commutateurs $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ pour $a, b \in G$.

3. Montrer que $D(G) \lhd G$ et que pour tout $H \lhd G$, le quotient G/H est abélien si et seulement si $D(G) \subset G$.
4. La suite des sous-groupes dérivés $D_i(G)$ de G est défnie par $D_0(G) = G$ et $D_{i+1}(G) = D(D_i(G))$. Montrer que G est résoluble si et seulement s'il existe n tel que $D_n(G) = \{1\}$.
5. Montrer que tout sous-groupe H d'un groupe résoluble G est résoluble. En déduire que S_n n'est résoluble pour aucun $n \geq 5$.
6. Montrer que si H est un sous-groupe distingué d'un groupe résoluble G alors G/H est résoluble.
7. Soit H un sous-groupe distingué de G tel que H et G/H sont résolubles. Montrer que G est résoluble.

Exercice 7.2 Soit K un corps de caractéristique nulle. Une extension L sur K est dite *radicale* si $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ et pour tout $i \in \{1, \ldots n\}$ il existe m_i tel que $\alpha_i^{m_i} \in K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$.

1. Montrer que toute extension radicale L sur K est contenue dans une extension radicale M sur K qui est de plus galoisienne.
2. Montrer que le groupe de Galois d'une extension Galoisienne radicale est résoluble.
3. Un polynôme $P \in K[X]$ est dit *résoluble par radicaux* s'il existe une extension M du corps de décompostion L de P sur K tel que M est une extension radicale de K. Montrer que le groupe de Galois d'un polynôme résoluble par radicaux est résoluble.
4. Montrer que si f est un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$ de degré un nombre premier p supérieur ou égal à 5 tel que f a exactement deux racines complexes non réelles alors f n'est pas résoluble par radicaux. Vérifier que le polynôme $X^5 - 6X + 3$ satisfait les propriétés ci-dessus.

Exercice 7.3 Soit L une extension galoisienne d'un corps K de caractéristique nulle tel que $G_{L/K}$ est résoluble. On pose $n = [L : K]$ et ξ une racine primitive n-ème de l'unité.

1. Montrer que $M = L(\xi)$ est galoisienne sur K et que $G_{L(\xi)/K}$ est résoluble.
2. Montrer qu'il existe une suite finie
$$\{1\} = G_r \lhd G_{r-1} \lhd \cdots \lhd G_1 \lhd G_0 = G_{L(\xi)/K(\xi)}$$
telle que pour tout $i < r$, le groupe G_i/G_{i+1} est un groupe cyclique d'ordre premier p_i.
3. En utilisant l'exercice 6.2, montrer que pour chaque $i < r$, il existe $\alpha_i \in M^{G_i}$ tel que $M^{G_i} = M^{G_{i+1}}[\alpha_i]$ et $\alpha_i^{p_i} \in M^{G_{i+1}}$.
4. En déduire que M est une extension radicale de K.
5. Conclure en donnant une caractérisation des polynômes résolubles par radicaux.