

8. Discriminant et corps de nombres.

On fixe pour toute la suite un corps de nombre K de degré n sur \mathbb{Q} (c.à.d. une extension de degré n sur \mathbb{Q}) et on note O_K l'anneau des entiers algébriques de K . On désigne par $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ les homomorphismes de K dans \mathbb{C} . Pour toute la suite on note simplement Tr et N pour la trace $\text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}$ et la norme $N_{K/\mathbb{Q}}$.

- Exercice 8.1**
1. Montrer qu'il existe $u \in O_K$ tel que $K = \mathbb{Q}(u)$.
 2. Montrer que si $x \in O_K$, alors $\text{Tr}(x)$ et $N(x)$ sont dans \mathbb{Z} .

Rappel de cours sur le discriminant : Soit $x_1, \dots, x_n \in K$. Rappelons la définition du discriminant $\text{Disc}(x_1, \dots, x_n) := \det[\text{Tr}(x_i x_j)]$. On a les propriétés suivantes :

1. $\text{Disc}(x_1, \dots, x_n) = (\det[\sigma_i(x_j)])^2$
2. $\text{Disc}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ si et seulement si (x_1, \dots, x_n) est une base de K sur \mathbb{Q} .
3. Soient (e_1, \dots, e_n) et (e'_1, \dots, e'_n) deux bases de K sur \mathbb{Q} . Notons A la matrice de passage de la première base vers la seconde. Alors

$$\text{Disc}(e'_1, \dots, e'_n) = (\det A)^2 \text{Disc}(e_1, \dots, e_n).$$

4. Si x est un élément primitif de K sur \mathbb{Q} de polynôme minimal f alors

$$\text{Disc}(1, x, \dots, x^{n-1}) = \text{Disc}(f) = \prod_{i < j} (\sigma_i(x) - \sigma_j(x))^2 = (-1)^{n(n-1)/2} N(f'(x)).$$

- Exercice 8.2 (Bases intégrales)**
1. Montrer que si $x_1, \dots, x_n \in O_K$ alors $\text{Disc}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}$.
 2. Soit $e_1, \dots, e_n \in O_K$ tel que (e_1, \dots, e_n) soit une base de K sur \mathbb{Q} avec $|\text{Disc}(e_1, \dots, e_n)|$ minimal parmi de telles bases formées d'entiers algébriques. Montrer que $O_K = \mathbb{Z}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_n$. (Indication : supposer qu'il existe $x = \sum a_i e_i \in O_K$ tel que $a_1 \notin \mathbb{Z}$ et utiliser la base $(x - b_1 e_1, e_2, \dots, e_n)$ où b_1 est la partie entière de a_1 .)
 3. En déduire que O_K est un \mathbb{Z} -module libre de rang n .
 4. Vérifier que toute base du \mathbb{Z} -module O_K est aussi une base de K sur \mathbb{Q} . On appellera une telle base, **base intégrale** de K .
 5. Montrer que toutes les bases intégrales ont même discriminant. On appellera ce discriminant le **discriminant** de K que l'on notera $\text{Disc}(K)$.

Pour l'exercice suivant, on utilisera le "**théorème de la base adaptée**" : si M est un module libre de rang n sur un anneau principal A , et si N est un sous-module de M alors :

1. N est un module libre de rang $q \leq n$;
2. il existe une base (e_1, \dots, e_n) de M et des éléments non nuls a_1, \dots, a_q de A tels que $(a_1 e_1, \dots, a_q e_q)$ soit une base de N (et tels que $a_i \mid a_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq q-1$).

Exercice 8.3 Soit (u_1, \dots, u_n) une base de K formée d'entiers algébriques.

1. Montrer que le module quotient $O_K / (\mathbb{Z}u_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}u_n)$ est fini. On appelle **indice** du sous-module $\mathbb{Z}u_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}u_n$ dans O_K le cardinal $[O_K : \mathbb{Z}[u_1, \dots, u_n]]$.
2. Montrer que $\text{Disc}(u_1, \dots, u_n) = m^2 \text{Disc}(K)$ où m est l'indice de $\mathbb{Z}u_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}u_n$ dans O_K .

Exercice 8.4 Soit $u \in O_K$ un élément primitif de K sur \mathbb{Q} tel que le polynôme minimal de u est d'Eisenstein en p . Le but de cet exercice est de montrer que $p \nmid [O_K : \mathbb{Z}[u]]$.

1. Montrer que $p^{-1}u^n \in O_K$ et $p^2 \nmid N(u)$.
2. Supposons que $p \mid [O_K : \mathbb{Z}[u]]$. Montrer qu'il existe $x \in O_K \setminus \mathbb{Z}[u]$ tel que $px \in \mathbb{Z}[u]$.

3. En déduire qu'il existe des entiers b_0, \dots, b_{n-1} non tous divisibles par p tel que $x = p^{-1}(b_0 + b_1u + \dots + b_{n-1}u^{n-1})$.
4. Soit $y = p^{-1}(b_r u^r + \dots + b_{n-1}u^{n-1})$ avec r le plus petit entier tel que b_r non divisible par p . Montrer que y est un entier algébrique.
5. Soit $z = p^{-1}b_r u^{n-1}$. Montrer que z est aussi un entier algébrique.
6. Montrer que $p^n N(z) = b_r^n N(u)^{n-1}$.
7. En déduire une contradiction.

Pour la suite, on considère un “**corps cubique pur**” K , c.à.d. tel que $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{d})$ avec d entier strictement supérieur à 1 sans facteur cubique. Le but du problème suivant est de déterminer l'anneau des entiers $O_{\mathbb{Q}(\sqrt[3]{d})}$.

Problème 8.1 On note $\theta_1 = \sqrt[3]{d}$.

1. (a) Quel est le polynôme minimal de θ_1 et quels sont ses conjugués.
 (b) Calculer $\text{Disc}(1, \theta_1, \theta_1^2)$.
 (c) Démontrer qu'il existe deux entiers positifs a et b uniques tels que ab soit sans facteur carré et $d = ab^2$. On pose $\theta_2 = \sqrt[3]{a^2b}$. Démontrer que θ_2 est un élément primitif de K sur \mathbb{Q} et que $\text{Disc}(1, \theta_2, \theta_2^2) = -27a^4b^2$.
 (d) Démontrer que $(1, \theta_1, \theta_2)$ est une base de K sur \mathbb{Q} et que $\text{Disc}(1, \theta_1, \theta_2) = -27a^2b^2$.
2. Soient u, v, w les indices respectifs des sous-modules $\mathbb{Z}[\theta_1]$, $\mathbb{Z}[\theta_2]$ et $\mathbb{Z}[1, \theta_1, \theta_2]$ dans O_K .
 (a) Montrer que $(a, u) = 1$ (on utilisera l'exercice 8.4). En déduire que :
 i. si $3 \mid a$ alors $\text{Disc}(K)$ est divisible par $27a^2$;
 ii. sinon $\text{Disc}(K)$ est divisible par a^2 .
 (b) Montrer que $(b, v) = 1$. En déduire que :
 i. si $3 \mid b$, alors $\text{Disc}(K)$ est divisible par $27b^2$;
 ii. sinon $\text{Disc}(K)$ est divisible par b^2 .
 (c) Démontrer que $\text{Disc}(K)$ est divisible par a^2b^2 , est négatif et divise $27a^2b^2$.
3. Démontrer que si $d \equiv 0 \pmod{3}$ alors $\text{Disc}(K) = -27a^2b^2$ et $(1, \theta_1, \theta_2)$ est une base intégrale de K .
4. Plus généralement démontrer le résultat précédent pour $d \not\equiv \pm 1 \pmod{9}$: on pourra vérifier que $\theta_1 - d$ a un polynôme minimal d'Eisenstein en 3.
5. On suppose que $d \equiv 1 \pmod{9}$. On considère $\alpha = (1 + \theta_1 + \theta_1^2)/3$.
 (a) Montrer que α est un entier algébrique. (On calculera son polynôme minimal.)
 (b) En déduire que $3 \mid w$ et donc que $\text{Disc}(K) = -3a^2b^2$.
 (c) Montrer que $(\alpha, \theta_1, \theta_2)$ est une base intégrale de K .
6. Si $d \equiv -1 \pmod{9}$ montrer que $((1 - \theta_1 + \theta_1^2)/3, \theta_1, \theta_2)$ est une base intégrale de K .
7. Conclusion (théorème dû à Dedekind en 1900) :
 (a) Si $d \not\equiv \pm 1 \pmod{9}$ alors $\text{Disc}(K) = -27a^2b^2$ et $(1, \theta_1, \theta_2)$ est une base intégrale de K .
 (b) Si $d \equiv \pm 1 \pmod{9}$ alors $\text{Disc}(K) = -3a^2b^2$ et
 i. $((1 + \theta_1 + b\theta_2)/3, \theta_1, \theta_2)$ est une base intégrale de K si $d \equiv 1 \pmod{9}$,
 ii. $((1 - \theta_1 + b\theta_2)/3, \theta_1, \theta_2)$ est une base intégrale de K si $d \equiv -1 \pmod{9}$