Révision pour le partiel.
Exercices sur la correspondance de Galois.

Exercice 3.1 Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ deux complexes algébriques sur $\mathbb{Q}$. On suppose que $L = \mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ est une extension Galoisienne sur $\mathbb{Q}$ et on note G le groupe de Galois correspondant. On note H et K les sous-groupes de G correspondants à $\mathbb{Q}[\alpha]$ et $\mathbb{Q}[\beta]$ respectivement.

1. Montrer que $H \cap K = \{e\}$.
2. Montrer que $HK = G$ si et seulement si le polynôme minimal $P_{\beta,\mathbb{Q}}$ de β sur $\mathbb{Q}$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[\alpha][X]$. On suppose pour la suite que ces conditions équivalentes sont vérifiées.
3. Montrer que K est distingué dans G si et seulement si $\mathbb{Q}[\beta]$ est le corps de racines de $P_{\beta,\mathbb{Q}}$. Que peut-on dire de G dans ce cas ? Donner un exemple où K est distingué et H ne l'est pas.
4. Montrer que G est le produit direct de K et H si et seulement si $\mathbb{Q}[\alpha]$ et $\mathbb{Q}[\beta]$ sont des extensions Galoisiennes de $\mathbb{Q}$. Donner un exemple.

Exercice 3.2 Soit L le corps des racines de $X^4 - 5$ sur $\mathbb{Q}$.

1. Calculer $[L : \mathbb{Q}]$. Notons G le groupe de galois de L sur $\mathbb{Q}$.
2. Soit $\alpha = \sqrt[4]{5}$. Montrer qu'il existe un unique automorphisme $\pi \in G$ tel que $\pi(i) = i$ et $\pi(\alpha) = i\alpha$.
3. Montrer qu'il existe un unique automorphisme $\sigma \in G$ tel que $\sigma(i) = -i$ et $\sigma(\alpha) = \alpha$. Vérifier que $G = \langle \sigma, \pi \rangle$.
4. Tracer le diagramme des sous-groupes de G.
5. Soit H un sous-groupe de G et $\tau \in G$. Montrer que
$$\tau(L^H) = L^{\tau H \tau^{-1}}.$$
En déduire le sous-groupe de G correspondant à $\mathbb{Q}(i\alpha)$.
6. Déterminer le corps intermédiaire correspondant au groupe de Klein $\langle \sigma, \pi^2 \rangle$. Puis le sous-groupe de G correspondant à $\mathbb{Q}(i, \alpha^2)$.
7. Quel est le degré de $L^{\langle \pi\sigma \rangle}$ sur $\mathbb{Q}$? Montrer que $\alpha + i\alpha \in L^{\langle \pi\sigma \rangle}$. Calculer $\pi^k(\alpha + i\alpha)$ pour $k \in \mathbb{Z}$. En déduire que $L^{\langle \pi\sigma \rangle} = \mathbb{Q}(\alpha + i\alpha)$. Déterminer le sous-groupe correspondant à $\mathbb{Q}(\alpha - i\alpha)$.
8. Compléter le diagramme des corps intermédiaires de l'extension $L/\mathbb{Q}$.