Epreuve d'examen

durée : 2 h 30

Notes de cours autorisées

Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées

Exercice 1 Soient $L_1 = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, i\right)$, $L_2 = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$ et $L_3 = \mathbb{Q}\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$.

1. Déterminer $K = L_1 \cap L_2 \cap L_3$.
2. Dire pourquoi K sur $\mathbb{Q}$, L_1 sur K, L_2 sur K et L_3 sur K sont des extensions galoisiennnes ?
3. (a) Donner un élément primitif de L_1 sur $\mathbb{Q}$ et déterminer son polynôme minimal.
   (b) L_1 est-elle une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$? Si oui, déterminer son groupe de Galois.
4. (a) Déterminer le polynôme minimal de $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ sur $\mathbb{Q}$.
   (b) L_2 est-elle une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$? Si oui, déterminer son groupe de Galois.
5. (a) Déterminer le polynôme minimal de $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ sur $\mathbb{Q}$.
   (b) L_3 est-elle une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$? Si oui, déterminer son groupe de Galois.

Exercice 2

Soit le polynôme $P = X^5 - X + 3$ de $\mathbb{Q}[X]$.

1. (a) Montrer que la réduction de P modulo 5 n'a pas de racine dans $\mathbb{F}_{25}$.
   (b) En déduire que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
2. On identifie $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(P)$ à un sous-groupe de S_5. Par réduction modulo 3 montrer que $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(P)$ contient une transposition.
3. En déduire $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(P)$.
4. L'équation $x^5 - x + 3 = 0$ est-elle résoluble par radicaux ?

Exercice 3

1. (a) Quel est le polynôme minimal P sur $\mathbb{Q}$ de $\eta = \exp(2\pi i/5)$?
   (b) Déterminer un polynôme $T \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P = X^2\, T(X + 1/X)$.
   (c) En déduire que $\cos \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.
2. Soit $\omega = \exp(2\pi i/15)$. Quel est le degré de $\mathbb{Q}(\omega)$ sur $\mathbb{Q}$?
3. Calculer le polynôme minimal de ω sur $\mathbb{Q}$.
4. Montrer que $\mathbb{Q}(\omega)$ est une extension de degré 2 de $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/15))$ et que $\mathbb{Q}(\omega) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}(\cos(2\pi/15))$.
5. En déduire que $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subset \mathbb{Q}(\cos(2\pi/15))$.
6. Le polygone régulier à 15 cotés de rayon 1 est-il constructible à la règle et au compas ?

7. Montrer que $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
8. Pour tout k premier avec 15, on note σ_k l'élément de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\omega)/Q)$ qui envoie ω sur ω^k. Décrire $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\omega)/Q(\sqrt{5}))$ en fonction des σ_k.
9. En déduire que $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\cos(2\pi/15))/Q(\sqrt{5})) = \langle\tau\rangle$ où τ est la restriction de σ_4 à $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/15))$.
10. Calculer le polynôme minimal de $\cos(2\pi/15)$ sur $Q(\sqrt{5})$.
11. En déduire une expression algébrique de $\cos(2\pi/15)$.