# Devoir 1.

**Exercice 1** Questions de révisions. Argumentez vos réponses.

1. Un polynôme réductible sur un corps $K$ a-t-il nécessairement une racine sur ce corps ?
2. Pour les polynômes à coéfficents entiers, quel est le rapport entre l'irréductiblité sur $\mathbb{Z}$ et l'irréductiblité sur $\mathbb{Q}$ ?
3. Tout morphisme d'anneaux d'un corps $K$ dans un anneau $A$ est-il injectif ?
4. Soit $P$ un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$. Soit $p$ un nombre premier et $\overline{P}$ la réduction modulo $p$ de $P$ dans $\mathbb{F}_p[X]$. A-t-on $\overline{P}$ irréductible sur $\mathbb{F}_p$ implique $P$ irréductible sur $\mathbb{Q}$ ? La réciproque est-elle vraie ?
5. Soit $A$ un anneau commutatif. L'anneau $A[X]$ est-il toujours principal ? Sinon, donnez une condition nécessaire et suffisante sur $A$ pour que $A[X]$ soit principal.
6. Soient $A$ un anneau commutaif et $P$ un polynôme de $A[X]$. Ce polynôme $P$ a-t-il necessairement au plus $\deg P$ racines dans $A$ ?
7. Soient $K$ un corps et $P$ un polynôme de $K[X]$. On note $(P)$ l'idéal engendré par $P$ dans $K[X]$. A quelle conditon (nécessaire et suffisante) sur $P$, l'anneau quotient $K[X]/(P)$ est un corps ?

**Exercice 2**

1. Déterminer les automorphismes du corps $\mathbb{Q}$.
2. Déterminer les automorphismes du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
3. Déterminer les automorphismes du corps $\mathbb{R}$. (On pourra montrer que tout automorphisme de $\mathbb{R}$ est strictement croissant et utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.)
4. Déterminer le groupe de Galois de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) := \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$.

**Exercice 3** Soient $K$ est un corps et $K(X)$ le corps des fractions rationnelles à coéfficients dans $K$. Soit $G := \mathrm{Aut}_K(K(X))$ le groupe de Galois de $K(X)$ sur $K$.

1. Vérifier que pour $a \in K$, l'application qui à $F(X) \in K(X)$ associe $F(X+a)$ est un automorphisme de $K(X)$.
2. En déduire que si $K$ est infini alors $G$ est infini.
3. Soit $\mathrm{Fix}(G) := \{F \in K(X) | \sigma(F) = F, \ \forall \sigma \in G\}$ le corps fixe de $G$. Montrer que si $K$ est infini alors $\mathrm{Fix}(G) = K$.