Devoir 1. (A rendre Mardi 12 février 2008)

Exercice 1 Questions de révisions. Argumentez vos réponses.

1. Un polynôme réductible sur un corps K a-t-il nécessairement une racine sur ce corps ?
2. Pour les polynômes à coefficents entiers, quel est le rapport entre l'irréductiblité sur $\mathbb{Z}$ et l'irréductiblité sur $\mathbb{Q}$?
3. Tout morphisme d'anneaux d'un corps K dans un anneau A est-il injectif ?
4. Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$. Soit p un nombre premier et $\overline{P}$ la réduction modulo p de P dans $\mathbb{F}_p[X]$. A-t-on $\overline{P}$ irréductible sur $\mathbb{F}_p$ implique P irréductible sur $\mathbb{Q}$? La réciproque est-elle vraie ?
5. Soit A un anneau commutatif. L'anneau $A[X]$ est-il toujours principal ? Sinon, donnez une condition nécessaire et suffisante sur A pour que $A[X]$ soit principal.
6. Soient A un anneau commutaif et P un polynôme de $A[X]$. Ce polynôme P a-t-il necessairement au plus $\deg P$ racines dans A ?
7. Soient K un corps et P un polynôme de $K[X]$. On note (P) l'idéal engendré par P dans $K[X]$. A quelle conditon (nécessaire et suffisante) sur P, l'anneau quotient $K[X]/(P)$ est un corps ?

Exercice 2 (Fiche 1 exo 11) Soit K un corps fini à q éléments de caractéristique p impair.

1. Montrer que l'application
$$\begin{array}{cccc} \varphi : & K^\times & \to & K^\times \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$
est un morphisme de groupes et que $\mathrm{Im}\varphi$ est d'indice 2 dans $K^\times$.
2. Soit $x \in K^\times$; montrer que x est un carré dans K si et seulement si $x^{(q-1)/2} = 1$.
3. Montrer que -1 est un carré dans K si et seulement si $q \equiv 1 \pmod 4$.
4. a) Soit L un corps contenant K sur lequel X^4+1 est scindé. Soit $\alpha \in L$ une racine de X^4+1. Vérifier que :
$$\left(\alpha + \alpha^{-1}\right)^2 = 2.$$

   b) En déduire que 2 est un carré dans K si et seulement si $q \equiv \pm 1 \pmod 8$. (On admettra qu'il existe toujours un corps L contenant K sur lequel X^4+1 est scindé.)