Devoir 2 (extrait du partiel 2007)

A rendre Mardi 26 février 2008

Exercice 1

1. Calculer les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^2 + 3X + 1$.

   Soit α une racine dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^6 + 3X^3 + 1$.
2. Montrer que $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\alpha)$. En déduire que $2/[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.
3. Montrer que $\beta = \alpha + 1/\alpha$ est racine de $X^3 - 3X + 3$. En déduire que $3/[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.
4. Calculer $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ et en déduire que $X^6 + 3X^3 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
5. Déterminer le corps L des racines de $X^6 + 3X^3 + 1$ en fonction de α et $j = \mathrm{e}^{2\pi i/3}$.
6. Calculer $[L : \mathbb{Q}]$.

Exercice 2 Soit K un corps de caractéristique $p > 0$. On rappelle que $K^p = \{x^p : x \in K\}$ est un sous-corps de K.

1. Soit L un corps tel que $K^p \subset L \subset K$ et soit $\alpha \in K \setminus L$. Montrer que $X^p - \alpha^p$ est irréductible sur L.
2. En déduire que si K est une extension de degré fini de K^p alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $[K : K^p] = p^n$.