Epreuve d'entrainement

Mardi 7 avril 2009- 2 heures

Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées

Exercice 1

1. Calculer les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^2 + 3X + 1$.

   Soit α une racine dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^6 + 3X^3 + 1$.
2. Montrer que $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\alpha)$. En déduire que $2/[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.
3. Montrer que $\beta = \alpha + 1/\alpha$ est racine de $X^3 - 3X + 3$. En déduire que $3/[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.
4. Calculer $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ et en déduire que $X^6 + 3X^3 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
5. Déterminer le corps L des racines de $X^6 + 3X^3 + 1$ en fonction de α et $j = \mathrm{e}^{2\pi i/3}$.
6. Calculer $[L : \mathbb{Q}]$.

Exercice 2 On rappelle qu'une extension quadratique est une extension de degré 2.

1. Montrer que toute extension quadratique est une extension normale.
2. Soit L une extension quadratique de K de caractéristique différente de 2. Montrer que L est engendré au-dessus de K par une racine carrée d'un élément de K (c'est-à-dire $L = K(\alpha)$ avec $\alpha^2 \in K$.)
3. Le résultat de la question précédente est-il encore vrai en caractéristique 2 ?

Problème 3 Soit K un corps commutatif **totalement ordonné**, c'est-à-dire muni d'un ordre total $\leq$ compatible avec la structure de corps :

– $\forall a, b, c \in K$, si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$;
– $\forall a, b \in K$, si $a \geq 0$ et $b \geq 0$ alors $ab \geq 0$.

L'ordre vérifie alors les propriétés suivantes :

– $\forall a, b, c, d \in K$, si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$;
– $\forall a, b \in K$, si $a \leq b$ alors $-b \leq -a$;
– $\forall a, b \in K$, si $a \geq 0$ et $b \leq 0$ alors $ab \leq 0$;
– $\forall a, b \in K$, si $a \leq 0$ et $b \leq 0$ alors $ab \geq 0$.

On dit qu'un élément $a \in K$ est positif si $a \geq 0$, négatif si $a \leq 0$.

Remarque : Les corps $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ avec l'ordre usuel sont des corps totalement ordonnés.

1. (a) Montrer que 1 est positif.
   (b) En déduire que -1 n'est pas un carré dans K et en particulier que le corps $\mathbb{C}$ ne peut être muni d'un ordre total.
   (c) Montrer que K est de caractéristique nulle.

A partir de maintenant, on considère $L = K[i]$ un corps de décomposition de $X^2 + 1$ sur K (où i est une racine de -1 et on suppose que **tout élement positif de K est un carré dans K**.

2. (a) Montrer que tout élément de L est un carré dans L.
   (b) En déduire que tout polynôme de $L[X]$ de degré 2 est scindé dans L.

Enfin on suppose que **tout polynôme de $K[X]$ de degré impair admet une racine dans K**, c'est-à-dire on suppose que K est un **corps réel clos** (corps totalement ordonné tel que tout élement positif soit un carré dans ce corps et tout polynôme de degré impair sur ce corps admet au moins une racine dans ce corps).

3. Soit $P \in K[X]$ un polynôme non constant. On va montrer que P admet une racine dans L par récurrence sur $r = v_2(\deg(P))$ où $v_2(n)$ est la valuation 2-adique de n, c'est-à-dire la plus grande puissance de 2 divisant n.
   (a) Vérifiez le résultat pour $r = 0$.
   (b) On suppose $r \geq 1$. On se place dans un corps de décompositon M de P. On note $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ les racines de P dans M ($n = \deg(P)$). Pour chaque $b \in K$, on considère le polynôme dans $M[X]$ suivant :
   $$Q_b = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X - a_i - a_j - b a_i a_j).$$
      i. Déterminer $v_2(\deg(Q_b))$.
      ii. Montrer que $Q_b \in K[X]$.
      iii. En déduire qu'il existe $i_0 \neq j_0$ tel que $(X - a_{i_0})(X - a_{j_0}) \in L[X]$.
      iv. Conclure (à l'aide de 2. (b)).
4. Montrer que tout polynôme non constant de $L[X]$ admet au moins une racine dans L. (On se ramènera pour cela à un polynôme à coefficients dans K.)
5. En déduire que le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.