Université Claude Bernard Lyon1.
Master MAIM M1.
Théorie de Galois.

EPREUVE D' EXAMEN

Documents non autorisés.

Mai 2008

Durée : 3 heures.

Soit a un entier non nul .

1°) Montrer que le polynôme $f(X) = X^3 - aX + a$ est irréductible sur $\mathbf{Q}$ si $a \neq 8$. (On pourra montrer que si un entier x est racine de f , tout diviseur premier de x-1 divise x)
Factoriser f sur $\mathbf{Q}$ si a = 8.

2°) On note $g(X) = f(X^2)$ et L le corps des racines complexes de g sur **Q.**

a) Vérifier que $L = \mathbf{Q}(\sqrt{u}, \sqrt{v}, \sqrt{w})$, où on a noté u, v, w les trois racines de f.

b) On pose : $x = u\sqrt{v}\sqrt{w} + v\sqrt{w}\sqrt{u} + w\sqrt{u}\sqrt{v}$.

Vérifier : $x^2 = -2a(\sqrt{u}\sqrt{v} + \sqrt{v}\sqrt{w} + \sqrt{w}\sqrt{u})$.
En déduire que x est racine du polynôme $h(X) = X^4 - 8a^2X + 4a^3$.

c) Exprimer toutes les racines de h en fonction de $\sqrt{u}, \sqrt{v}, \sqrt{w}$.

En déduire : $L = K(\sqrt{-a})$, où on a noté K le corps des racines de h.

d) Montrer que K contient u, v et w.

Dorénavant, on suppose a positif et non divisible par 3.

3°) Dans cette question, on suppose $a \equiv 1$ modulo 3 et $a \neq 4$.

a) Factoriser h modulo 3.

b) Montrer que h est irréductible sur $\mathbf{Q}$. (On pourra d'abord montrer que h n'a pas de racine réelle si $a \geq 7$ et vérifier directement que h n'a pas de racine rationnelle si a = 1.)

c) En déduire que $|\mathrm{Gal}_{\mathbf{Q}}(h)|$ est divisible par 12 et donc que $\mathrm{Gal}_{\mathbf{Q}}(h)$ est isomorphe à $\mathbf{S}_4$ ou $\mathbf{A}_4$.

4°) Dans cette question, on suppose $a \equiv -1$ modulo 3.

a) Montrer que la réduction de h modulo 3 n'a pas de racine dans $\mathbf{F}_9$. En déduire que h est irréductible sur $\mathbf{Q}$ et que $\mathrm{Gal}_{\mathbf{Q}}(h)$ contient un 4-cycle.

b) Si $a \neq 8$, montrer que $|\mathrm{Gal}_{\mathbf{Q}}(h)|$ est divisible par 12 et donc que $\mathrm{Gal}_{\mathbf{Q}}(h)$ est isomorphe à $\mathbf{S}_4$.

c) Si $a = 8$, factoriser h modulo 13. En déduire que $\mathrm{Gal}_{\mathbf{Q}}(h)$ contient une transposition et donc est isomorphe à $\mathbf{S}_4$.

5°) Pour $a = 4$, factoriser h sur $\mathbf{Q}$ et en déduire que $\mathrm{Gal}_{\mathbf{Q}}(h)$ est isomorphe à $\mathbf{S}_3$.

6°) a) Calculer Δ le discriminant de h en fonction de a. Vérifier (par réduction modulo 3) que $-a\,\Delta$ n'est pas un carré dans $\mathbf{Q}$.

b) En déduire : $K \cap \mathbf{Q}(\sqrt{-a}) = \mathbf{Q}$. (On rappelle que $\mathbf{A}_4$ n'a pas de sous-groupe d'indice 2 et que $\mathbf{S}_4$ et $\mathbf{S}_3$ n'en ont qu'un seul.)

7°) Montrer que $H = \mathrm{Gal}(L/K)$ et $H' = \mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q}(\sqrt{-a}))$ sont des sous -groupes distingués de $G = \mathrm{Gal}_{\mathbf{Q}}(g)$, que $H \cap H'$ est trivial et que $G = H H'$.

8°) En déduire que le groupe G est isomorphe à un produit direct :

$\mathbf{A}_4 \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ si $4a - 27$ est un carré dans $\mathbf{Z}$.
$\mathbf{S}_4 \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ si $4a - 27$ n'est pas un carré dans $\mathbf{Z}$ et $a \neq 4$.
$\mathbf{S}_3 \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ si $a = 4$.