3. Extensions de corps : extensions normales, extensions séparables.

Exercice 3.1 Soit K un corps de caractéristique $p > 0$. Montrer que $K^p = \{x^p : x \in K\}$ est un sous-corps de K et que K/K^p est une extension normale.

Exercice 3.2 Soit q une puissance d'un nombre premier p, soit n un entier non divisible par p, $L = \mathbb{F}_q(Y)$ et $K = \mathbb{F}_q(Y^n)$.

1. Montrer que L/K est séparable.
2. Montrer que L/K est normale si et seulement si $q \equiv 1 \pmod{n}$.

Exercice 3.3 Soit L/K une extension algébrique, Ω une clôture algébrique de K contenant L. Le groupe G des K-automorphismes de Ω agit sur la Ω-algèbre $\Omega[X]$ par

$$\sigma\left(\sum_i \lambda_i X^i\right) = \sum_i \sigma(\lambda_i) X^i$$

où $\sigma \in G$ et $\sum_i \lambda_i X^i \in \Omega[X]$.

1. On suppose L/K normale. Soit $P \in K[X]$ irréductible sur K. Montrer que l'ensemble des facteurs irréductibles unitaires de P dans $L[X]$ est une G-orbite de $\Omega[X]$. En particulier, tous les facteurs irréductibles de P dans $L[X]$ ont même degré.
2. Réciproquement, supposons cette dernière condition vérifiée pour tout polynôme irréductible de $K[X]$. Prouver que L/K est normale.

Exercice 3.4 Soit p un nombre premier congru à ± 3 modulo 8. Montrer que pour tout quadruplet d'entiers relatifs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ avec $p \nmid \delta$, le polynôme

$$X^4 + p(\alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta)$$

est irréductible sur $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. (Indication : utiliser l'exercice précédent.)

Exercice 3.5 Soit K un corps fini, L une extension algébrique de K. Montrer que L/K est normale.

Exercice 3.6 Soit K un corps infini, Ω une clôture algébrique de K.

1. Soit $x, y \in \Omega$. On note P (resp. Q) le polynôme minimal de x (resp. y) sur K, $x_1 = x, x_2, \ldots, x_n$ (resp. $y_1 = y, y_2, \ldots, y_m$) les racines distinctes de P (resp. Q) dans Ω.
   a. Montrer qu'il existe $\lambda \in K^\times$ tel que

   $$\forall i \neq 1, \forall j \neq 1,\ \lambda x + y \neq \lambda x_i + y_j.$$

   On pose $z = \lambda x + y$.

   b. Montrer que $R(X) = Q(z - \lambda X)$ et $P(X)$ ont une seule racine commune dans Ω.
2. On suppose que x est séparable sur K. Calculer le polynôme minimal de x sur $K(z)$ et en déduire que $K(x, y) = K(z)$.
3. On suppose K parfait. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \Omega$. Montrer qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dans K tels que :
$$K(x_1, \ldots, x_n) = K(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n).$$

Exercice 3.7 On considère le polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ suivant :

$$Q(X) = X^9 + 9X^8 - X^3 + 3X^2 - 3X + 11.$$

Soit p un nombre premier, on notera par la suite $\overline{Q}_p$ la réduction de Q modulo p.

1. Montrer que $X^3 - X - 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_3[X]$.
2. Décomposer $\overline{Q}_3$ en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{F}_3[X]$.
3. Soit $\alpha \in \bar{\mathbb{F}}_2$ une racine de $X^4 + X + 1$ où $\bar{\mathbb{F}}_2$ désigne une clôture algébrique de $\mathbb{F}_2$. Décrire l'orbite
$$\{F^i(\alpha),\ i \geq 0\}$$
où F désigne l'automorphisme de Frobenius de $\bar{\mathbb{F}}_2/\mathbb{F}_2$. En déduire que $X^4 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{F}_2$.
4. Décomposer $\overline{Q}_2$ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{F}_2[X]$.
5. Montrer que Q est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 3.8 (Corps de décomposition d'un polynôme de troisième degré) *Soient K un corps de caractéristique différente de 3, P un polynôme irréductible dans $K[X]$ de degré 3 et L un corps décomposition de P. On rappelle que le discriminant $D(P)$ de P vaut $((a-b)(b-c)(c-a))^2$ où a, b, c sont les trois racines de P.*

1. *Montrer que L est une extension séparable de K.*
2. *Montrer L est le corps de décomposition d'un polynôme Q de la forme $X^3 + pX + q$ tel que $D(Q) = D(P) = -27q^2 - 4p^3$. Pour la suite, on suppose que $P = Q$ et on note $d = (a-b)(b-c)(c-a)$.*
3. *Montrer que $(a-b)(c-a) = -2a^2 + \dfrac{q}{a}$ et en déduire que $b - c \in K[a, d]$, puis que $b, c \in K[a, d]$ et $L = K[a, d]$.*
4. *Montrer que L est une extension de degré 3 ou 6 de K suivant si $D(P)$ est un carré ou non de K.*
5. *En déduire que $K[a]$ est une extension normale de K si et seulement si $d \in K$.*
6. *Soit a une racine complexe du polynôme $X^3 - 3X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que $\mathbb{Q}[a]$ est une extension normale de $\mathbb{Q}$.*