Examen partiel

Mardi 4 mars 2008 - 2 heures

Documents et calculatrices interdits

Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées

Exercice 1

On se place dans une clôture algébrique Ω du corps $\mathbb{F}_3$ et on considère le polynôme $P = X^4 + X^2 - 1$ sur $\mathbb{F}_3$.

Soit α une racine de P dans Ω.

1. Montrer que $\mathbb{F}_3(\alpha^2) = \mathbb{F}_9$.
2. Calculer α^8.
3. En déduire $[\mathbb{F}_3(\alpha) : \mathbb{F}_3]$ et l'entier q tel que $\mathbb{F}_3(\alpha) = \mathbb{F}_q$.
4. Déterminer l'ensemble des conjugués de α sur $\mathbb{F}_3$.

   Soit β une racine carrée de α danx Ω.
5. Montrer que $\beta \notin \mathbb{F}_3(\alpha)$.
6. En déduire que $X^8 + X^4 - 1$ est irréductible sur $\mathbb{F}_3$.

Exercice 2

1. (a) Déterminer $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}) : \mathbb{Q}]$.
   (b) Quels sont les conjugués de $\sqrt[4]{5}$ sur $\mathbb{Q}$?
   (c) L'extension $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$ est-elle normale sur $\mathbb{Q}$?
   (d) Déterminer le groupe des automorphismes de $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$.

   Soit $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{5})$.
2. (a) Expliquer pourquoi K est une extension galoisienne de degré 8.
   (b) En déduire l'irréductibilité de $X^4 - 5$ sur $\mathbb{Q}(i)$.
3. (a) Montrer qu'il existe un unique élément σ du groupe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ tel que :
   $$\sigma(i) = i \text{ et } \sigma(\sqrt[4]{5}) = i\sqrt[4]{5}.$$
   (b) Quel est l'ordre de σ ?
   (c) Montrer qu'il existe un unique élément τ du groupe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ tel que :
   $$\tau(i) = -i \text{ et } \tau(\sqrt[4]{5}) = \sqrt[4]{5}.$$
   (d) Montrer que les automorphismes σ et τ engendrent $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.
4. (a) Quels sont les conjugués de $\sqrt[4]{5} + i$?
   (b) En déduire que $\sqrt[4]{5} + i$ est un élément primitif de l'extension K sur $\mathbb{Q}$.
5. (a) Vérifier que $\tau \circ \sigma = \sigma^{-1} \circ \tau$.
   (b) Quel est l'ordre du sous-groupe H de $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ engendré par τ et σ^2 ?
   (c) En déduire que $K^H = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.