Programme du cours donné par M. Chamarie en 2008

3 premiers cours :

- Rappels sur les anneaux commutatifs, corps et polynômes. En particulier : indicateur d'Euler de n (= ordre du groupe des entiers inversibles modulo n) , racines, ordres de multiplicité, division euclidienne, décomposition en facteurs irréductibles, critères d'irréductibilité (Eisenstein, réduction modulo p), racines de l'unité (tout sous groupe fini du groupe multiplicatif d'un corps est cyclique), polynômes symétriques, relations coefficients-racines , polynôme scindé.

- extensions algébriques : polynôme minimal, degré, multiplicativité des degrés, corps algébriquement clos, clôture algébrique (preuve du théorème de Steinitz admise), prolongement des morphismes à une extension algébrique, corps de rupture , éléments conjugués, corps des racines d'un polynôme.

- Constructions à la règle et au compas ; corps des nombres constructibles.

4ème cours :

- extensions normales ; extensions normales de degré fini = corps des racines d'un polynôme.

- polynômes séparables ; extensions algébriques séparables ;lemme de Dedekind ; L est séparable sur K ssi le nombre de K-morphismes de L dans une clôture algébrique de K est égal au degré de L sur K ssi L est engendrée sur K par un élément (primitif) séparable.

-corps parfaits ; caractérisation par la surjectivité du Frobenius.

- corps finis : existence et unicité.

5ème cours :

-extensions galoisiennes ; groupe de Galois.

-correspondance de Galois.

- groupe de Galois d'un polynôme séparable ; représentation comme sous groupe de permutations des racines.

- fermeture galoisienne d'une extension séparable.

6ème cours :

-Extensions cyclotomiques.

-Polynômes cyclotomiques ; irréductibilité sur Q.

-Les extensions de corps finis sont cyclotomiques et cycliques avec un groupe de Galois engendré par une puissance convenable du Frobenius.

-Extensions radicales et extensions cycliques.

7ème et 8ème cours : Théorie de Galois des équations algébriques.

-f un polynôme séparable , G son groupe de Galois sur K : bijection entre les orbites de G dans les racines de f et les facteurs irréductibles sur K de f.

- Discriminant et utilisation pour savoir si le groupe de Galois est formé de permutations paires ou pas.Calcul du discriminant pour f de la forme $X^n + aX + b$.

- retour sur les constructions à la règle et au compas : un nombre algébrique est constructible ssi le groupe de Galois de son polynôme minimal est un 2-groupe.Construction des polygônes réguliers ; nombres premiers de Fermat.

-Théorème (Galois) : K un corps de caractéristique 0. Une équation algébrique $f(x) = 0$ est résoluble par radicaux sur K ssi le groupe de Galois de f sur K est résoluble.

- exemples d'équations non résolubles par radicaux.

- (Abel-Galois) l'équation générique de degré n est résoluble par radicaux ssi $n < 5$.

9ème cours :

- Un autre théorème de Galois : K de caractéristique 0 , f polynôme irréductible de degré p premier ; f(x) = 0 est résoluble par radicaux ssi le corps des racines de f est engendré sur K par deux racines arbitraires.

- détermination de groupes de Galois sur Q par réduction modulo p (méthode de Van den Waerden).

10ème cours : Normes et traces.

- Polynôme caractéristique d'un élément dans une extension. Lien avec le polynôme minimal. Norme et trace.Expressions dans un extension galoisienne.

- Théorème (lemme 90 de Hilbert) : caractérisation des éléments de trace nulle et des éléments de norme 1 dans une extension cyclique.

- Application aux extensions d'Artin-Schreier. Application au calcul des solutions rationnelles de certaines équations algébriques,(exemple traité : $x^2 - xy + y^2 = 1$).

11ème cours : Notion d'entier algébrique.

- Définition : racine(dans C) d'un polynôme unitaire à coefficients dans Z.

- Les entiers algébriques forment un sous-anneau de C. Le polynôme minimal sur Q d'un entier algébrique est à coefficients dans Z.

- Calcul de l'anneau des entiers pour :- les corps quadratiques,- les corps cyclotomiques (preuve donnée seulement dans le cas d'une racine p-ème de l'unité, avec p premier).

12ème cours :

- non dégénerescence de la forme trace pour une extension séparable.

- discriminant d'une famille à n éléments dans une extension de degré n ; lien avec le discriminant d'un polynôme.

- indépendance algébrique des morphismes pour une extension séparable.

- théorème de la base normale.

- Soit x une racine primitive n-ème de l'unité .L'orbite de x par le groupe de Galois est une base (normale) de Q(x) ssi n est sans facteur carré.