Maîtrise de Mathématiques
Logique et Complexité (Année 2003-2004)
Devoir 1 à retourner le 26/02/2004

Exercice 1. Deux théories T_1 et T_2, dans un même langage, sont dites **compagnes** l'une de l'autre si tout modèle de l'une peut se plonger dans un modèle de l'autre et vice versa.

1. Soient T_1 et T_2 deux théories compagnes l'une de l'autre. Montrer qu'elles ont mêmes conséquences universelles.
2. Soient T_1 et T_2 deux théories telles que toute conséquence universelle de T_2 est également conséquence de T_1. Soit $\mathfrak{M}$ un modèle de T_1. Après avoir nommé chaque élément de M par un nouveau symbole de constante, montrer par un argument de compacité que l'ensemble d'énoncés suivant est consistant :

$$T_2 \cup \{\phi(\bar{m}) : \mathfrak{M} \models \phi(\bar{m}), \phi \text{ formule sans quantificateur}\}.$$

   En déduire que tout modèle de T_1 se plonge dans un modèle de T_2.
3. Conclure que deux théories sont compagnes l'une de l'autre si et seulement si elles ont même conséquences universelles.

Exercice 2.

1. Montrer que tout énoncé universel vrai dans $\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ est vrai dans $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$.
2. Montrer par un argument de compacité qu'il existe une extension élémentaire G du groupe $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ contenant deux éléments non nuls a et b tels que les sous-groupes engendrés par a et b sont d'intersection triviale.
3. Montrer que $\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ se plonge dans G.
4. En déduire que les structures $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ et $\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ satisfont les mêmes énoncés universels. (Leurs théories sont donc compagnes l'une de l'autre.)

Exercice 3. Soit $\mathcal{L}$ un langage fini. Montrer que pour chaque $n < \omega$ il n'y a qu'un nombre fini de $\mathcal{L}$-structures non-isomorphes de cardinal n.

En déduire que si dans tous les modèles d'une $\mathcal{L}$-théorie T les sous-structures engendrées par un nombre fini d'éléments sont finies, alors il y a une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que pour tout n, une sous-structure engendrée par n éléments est de cardinal inférieur à $f(n)$.

[Indication: Supposer le contraire, trouver n tel qu'il y a des sous-structures de modèles de T engendrées par n éléments de cardinal arbitrairement grand, et utiliser la compacité pour en trouver une qui est infinie.]