Université Lyon I
Maîtrise de Mathématiques
Logique et complexité
Partiel
Jeudi 1 avril 2004, 14h30 - 17h30

Notes de cours et tds autorisées.

Exercice 1. Soit le langage $\mathcal{L} = \{f\}$ où f est un symbole de fonction unaire. Pour tout $n \geq 0$ on notera f^n la composé n-fois de f.
Soit T la $\mathcal{L}$-théorie axiomatisée par

$$\forall x f^n(x) \neq x \quad (n \geq 1)$$
$$\exists x(\forall z\ f(z) \neq x \wedge (\forall y(\forall t\ f(t) \neq y) \rightarrow x = y)$$
$$\forall x \forall y\ f(x) = f(y) \rightarrow x = y$$

(a) Montrer que tout modèle de T est infini. (Convention : un modèle est toujours supposé non vide.)

(b) Montrer que $\langle \mathbb{N}, s\rangle$ où s est la fonction successeur est un modèle de T.

(c) Montrer que T n'est pas finiment axiomatisable.

(d) Soit $\mathcal{M}$ un modèle de T. On définit sur $\mathcal{M}$ la relation $x \sim y$ s'il existe $n \geq 0$, $m \geq 0$ tel que $\mathcal{M} \models f^n(x) = f^m(y)$.

-i- Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

-ii- Montrer que chaque classe d'équivalence est une sous-structure de $\mathcal{M}$.

-iii- Montrer qu'une et une seule classe est isomorphe à $\langle \mathbb{N}, s\rangle$ et que toutes les autres sont isomorphes à $\langle \mathbb{Z}, s\rangle$ avec s la fonction successeur sur $\mathbb{Z}$.

(e) Soit κ un cardinal infini non dénombrable. Montrer que T est κ-catégorique (c.à.d. que les modèles de T de cardinal κ sont tous isomorphes.)

(f) En déduire que T est complète et que T est la théorie de $\langle \mathbb{N}, s\rangle$.

(g) Combien T a-t-elle de modèles dénombrables non isomorphes ?

(h) T est-elle modèle-complète ?

(i) Soit c un symbole de constante et T' la $\mathcal{L} \cup \{c\}$-théorie axiomatisée par T et l'axiome $\forall z f(z) \neq c$. Montrer que T' est complète et élimine les quanteurs.

(j) Montrer que $\langle \mathbb{N}, s\rangle$ se plonge élémentairement dans tout modèle de T.

Exercice 2. Soit le langage $\mathcal{L} = \{<, c_i : i \in \mathbb{N}\}$ où $<$ est une relation binaire et les c_i sont des constantes. Soit T la théorie des ordres totaux denses sans extrémité telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $c_i < c_{i+1}$.

(a) Soit $\mathcal{M}$ un modèle ω-saturé de T. Montrer que l'ensemble A des éléments majorants tous les c_i n'a pas de plus petit élément.

(b) Montrer que tout isomorphisme local entre deux modèles ω-saturés de T est un ∞-isomorphisme.

(c) En déduire que T est complète et élimine les quanteurs.

(d) Construire un modèle dénombrable de T qui contient un plus petit majorant de la suite (c_i).

(e) Montrer que T a exactement trois modèles dénombrables non isomorphes.

(f) Montrer qu'il y a deux des modèles dénombrables non isomorphes qui se plongent l'un dans l'autre et vice versa.

Exercice 3. On dit que deux uples finis de même longueur $\bar{a}$ et $\bar{b}$ dans une structure $\mathcal{M}$ ont même *type* s'ils satisfont dans $\mathcal{M}$ les mêmes formules sans paramètre.

(a) Soient $\bar{a}$ et $\bar{b}$ deux uples finis de même longueur dans une structure $\mathcal{M}$.

-i- Montrer que si un automorphisme de $\mathcal{M}$ envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$ alors $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type.

-ii- Montrer que si $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type et si $\mathcal{M}$ est ω-saturée dénombrable alors il existe un automorphisme de $\mathcal{M}$ qui envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$.

(b) -i- Donner un exemple de deux uples finis $\bar{a}$ et $\bar{b}$ dans une structure $\mathcal{M}$ qui ont même type et tel qu'il n'existe pas d'automorphisme de $\mathcal{M}$ qui envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$.

-ii- Soit $\mathcal{M}$ une extension élémentaire ω-saturée du groupe additif $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$. Montrer que pour toute partie A de l'ensemble des nombres premiers il existe un élément m_A de $\mathcal{M}$ qui est divisible par tous les nombres premiers dans A et par aucun autre nombre premier. En déduire que $\mathcal{M}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 4. Soit T une théorie. Montrer que T est axiomatisée par ses conséquences universelles si et seulement si pour tout modèle $\mathcal{M}$ de T, toute sous-structure de $\mathcal{M}$ est encore modèle de T.