Maîtrise de Mathématiques
Logique et Complexité (Année 2003-2004)
TD 1

Exercice 1. Démontrer que deux formules $\varphi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ sont équivalentes si et seulement si $\forall \bar{x}\ [\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})]$ est vrai dans toute $\mathcal{L}$-structure.

Exercice 2. Démontrer que toute formule est équivalente à une formule prénexe.

Exercice 3. Soit $(\varphi \downarrow \psi)$ une abbréviation pour $\neg(\varphi \vee \psi)$. Démontrer que toute formule est équivalente à une formule qui n'utilise que $\downarrow$ et $\exists$ comme symbôle logique.

Exercice 4. Soit $n \geq 1$ un entier. Écrire les énoncés signifiant :

- ϕ_n : la structure a au moins n éléments;
- ψ_n : la structure a au plus n éléments;
- E_n : la structure a exactement n éléments.

Exercice 5. Montrer que deux modèles d'une théorie complète satisfont les mêmes énoncés.

Exercice 6. Montrer qu'une théorie qui admet (au moins) deux modèles finis de cardinal distinct n'est pas complète.

Exercice 7. Soit $n > 1$ un entier. Montrer que la théorie des groupes finis à n^2 éléments dans la langage des groupes $\{1, \cdot, ^{-1}\}$ n'est pas complète.

Exercice 8. Soit $\mathcal{L} = \{B, \leq\}$, où B est un prédicat unaire, et $\leq$ une relation binaire. On appelle *chaîne bicolore* une $\mathcal{L}$-structure totalement ordonnée par $\leq$ (les éléments satisfaisant B seront dits *blancs*, les autres *noirs*); elle est *générique* si entre deux éléments blancs il y en a toujours au moins un noir, et entre deux noirs il y a toujours au moins un blanc.
a) Donner des exemples de chaînes bicolores génériques dénombrables et non dénombrables.
b) Donner un exemple d'une chaîne bicolore générique tel que l'ensemble des points blancs est dénombrable et tel que l'ensemble des points noirs n'est pas dénombrable.
c) Montrer qu'il existe une injection de l'ensemble des points blancs B d'une chaîne bicolore générique dans l'ensemble des parties de l'ensemble N des points noirs de cette même chaîne. (C'est-à-dire $card(B) \leq 2^{card(N)}$.) Remarquer de même que $card(N) \leq 2^{card(B)}$.
d) Axiomatiser les chaînes bicolores génériques.

Exercice 9. Considérons le langage $\{R, B, f\}$, où R et B sont des prédicats unaires et f une fonction unaire. Soit T la théorie dans ce langage donnée par les axiomes :

- $\forall x,\ R(x) \leftrightarrow \neg B(x)$
- $\forall x \forall y,\ f(x) = f(y) \rightarrow x = y$
- $\forall x,\ R(x) \leftrightarrow B(f(x))$

a) Trouver un modèle de T.
b) Montrer que $T \models \forall x,\ B(x) \leftrightarrow R(f(x))$.
c) Montrer que tout modèle fini de T est de cardinal pair.
d) Montrer que T n'est pas complète.