Maîtrise de Mathématiques
Logique et Complexité (Année 2003-2004)
TD 10

Convention : les langages considérés seront toujours supposés finis.

Exercice 1. (1) Soit $\mathfrak{M}$ une structure infinie. Montrer qu'il y a un problème sur $\mathfrak{M}$ qui n'est pas calculable (i.e. il n'existe pas de suite de circuits de décision correspondante).
(2) Soit $\mathfrak{M}$ une structure finie (Par hypothèse $|M| \geq 2$). Montrer qu'il y a un problème booléen sur $\mathfrak{M}$ qui n'est pas $\mathbb{P}$ au sens de $\mathfrak{M}$.
(3) Soit $\mathfrak{M}$ une structure infinie dénombrable. Montrer qu'il y a un problème booléen sur $\mathfrak{M}$ qui n'est pas $\mathbb{P}$ au sens de $\mathfrak{M}$. (Indication : considérer les classes des problèmes résolubles en temps n^c par les circuits de décisions qui n'utilisent que les c premiers paramètres, pour $c < \omega$.)

Exercice 2. Soit $\mathfrak{M}$ une structure dont le langage n'a qu'une fonction unaire (outre l'identité). Le selecteur sera représenté ici par une relation ternaire satisfaite par les uples $(0,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ et $(1,1,1)$. Montrer que tout problème booléen P au sens de $\mathfrak{M}$ est $\mathbb{P}$ standard. Donner un exemple où on a égalité.

Exercice 3. Soit $\mathfrak{M} = \langle M, +, -, = \rangle$ un groupe abélien divisible sans torsion qui est non trivial. Montrer que les problèmes $\mathbb{P}$ (resp. P) standards sont les mêmes que les problèmes booléens $\mathbb{P}$ (resp. P) au sens de $\mathfrak{M}$.

Exercice 4. Montrer que dans $\langle \mathbb{R}, +, -, \cdot, =, <, 0, 1 \rangle$ tout problème booléen est résoluble en temps exponentiel.

Exercice 5. (1) Montrer que tout problème booléen résoluble en temps parallèle $A \cdot \log n$ au sens de $\langle \mathbb{R}, +, -, =, 0, 1 \rangle$ se résoud par un algorithme standard de temps parallèle $B \cdot (\log n)^2$.
(2) Si on suppose que l'algorithme n'est autorisé qu'à faire un nombre logarithmique de tests, montrer que la simulation standard peut se faire en temps parallèle logarithmique.
(Indication: Introduire un processeur, par suite de réponses possibles aux tests, qui effectue les additions correspondantes et vérifie ensuite si les réponses aux tests sont celles qu'on a supposées; sélectionner le bon processeur.)

Exercice 6.
(1) Montrer que tout algorithme de décision dans $\langle \mathbb{R}, +, -, =, 0, 1 \rangle$ se simule avec perte de temps seulement polynomiale dans $\langle \mathbb{R}, +, =, 0, 1 \rangle$. (Indication: Utiliser des paires de réels.)
(2) Même question si l'on rajoute l'ordre.
(3) Montrer que $\langle \mathbb{R}, +, -, \cdot, ^{-1}, =, 0, 1 \rangle$ et $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, =, 0, 1 \rangle$ ont les mêmes problèmes P et les mêmes problèmes $\mathbb{P}$. (On convient que l'inverse de 0 est 0.)
(4) Même question si l'on rajoute l'ordre.