Maîtrise de Mathématiques
Logique et Complexité (Année 2003-2004)
TD 2

Exercice 1 Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ des $\mathcal{L}$-structures avec $M \subseteq N$. Alors $\mathfrak{M}$ est une $\mathcal{L}$-sous-structure de $\mathfrak{N}$ si et seulement si l'injection canonique est un $\mathcal{L}$-morphisme.

Exercice 2. Rappelons le **théorème de Cantor-Bernstein :** si E et F sont des ensembles et s'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E alors il existe une bijection de E dans F.
Montrer que c'est n'est plus vrai si l'on enrichit le langage par une relation binaire : i.e. considérer le langage $\mathcal{L} = \{R\}$ où R est une relation binaire et montrer qu'il existe deux $\mathcal{L}$-structures $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ telles qu'il y a un $\mathcal{L}$-morphisme de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$ et un $\mathcal{L}$-morphisme de $\mathfrak{N}$ dans $\mathfrak{M}$ mais pas de $\mathcal{L}$-isomorphisme de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{N}$.

Exercice 3

1. Montrer qu'un $\mathcal{L}$-morphisme préserve les formules existentielles de la gauche vers la droite. (Une formule existentielle est une formule de la forme $\exists \bar{x} \phi$ où ϕ est une formule sans quantificateur.)
2. Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures se plongeant l'une dans l'autre et réciproquement (c'est-à-dire telles qu'il existe un $\mathcal{L}$-morphisme de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$ et un $\mathcal{L}$-morphisme de $\mathfrak{N}$ dans $\mathfrak{M}$). Montrer que $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ ont même théorie universelle (i.e. elles satisfont les mêmes énoncés universels).

Exercice 4. Soit $\mathfrak{M}$ une sous-structure de $\mathfrak{N}$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$.
- $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, M) = \mathrm{Th}(\mathfrak{N}, M)$.
- l'injection canonique $\mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ est un $\mathcal{L}$-morphisme élémentaire.

Exercice 5. Soient $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}'$ des $\mathcal{L}$-structures.

1. Si $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N} \prec \mathfrak{N}'$, alors $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}'$. (i.e. $\prec$ est transitive.)
2. Si $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}'$ et $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{N}'$, alors $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$.

Exercice 6. On se place dans le langage des groupes abéliens $\{0, +\}$. Trouver un exemple de deux groupes abéliens G et H tels que G est un sous-groupe de H, G et H sont élémentairement équivalents mais G n'est pas un sous-groupe élémentaire de H.

Exercice 7. Entre quelles structures dans la liste suivante est-ce qu'il y a un $\mathcal{L}$-morphisme? un $\mathcal{L}$-morphisme élémentaire? Donner le morphisme, si possible.

$$\langle \mathbb{Q}, \leq, +, 0 \rangle, \quad \langle \mathbb{Q}, \leq, \cdot, 1 \rangle, \quad \langle \mathbb{R}, \leq, +, 0 \rangle, \quad \langle \mathbb{R}, \leq, \cdot, 1 \rangle, \quad \langle \mathbb{R}^+, \leq, \cdot, 1 \rangle$$

Exercice 7. Si $\mathcal{L}$ contient des constantes, montrer:

1. Toute $\mathcal{L}$-structure a une unique sous-structure minimale.

2. Si $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$, alors leurs sous-structures minimales sont isomorphes.

Exercice 9. On se place dans le langage réduit à l'égalité.

1. Écrire l'énoncé ϕ_n qui traduit l'existence d'au moins n éléments distincts. ($n > 0$ un entier.)

2. Montrer que la théorie $\{\phi_n, n > 0\}$ est complète.

Exercice 10. On considère la théorie T' donnée par les axiomes de la théorie T de l'exercice 9 du TD1 auxquels on ajoute les axiomes ϕ_n de l'exercice précédent. Montrer que T' est alors complète.

Exercice 11. On se place dans un langage ne contenant qu'une relation binaire E.

1. Écrire les formules signifiant:
   - θ : E est une relation d'équivalence.
   - $\phi_n(x)$: la classe d'équivalence de x a au moins n éléments. ($n > 0$ un entier.)
   - $\psi_n(x)$: il y a au moins n classes d'équivalence distinctes. ($n > 0$ un entier.)

2. A l'aide des formules précédentes, axiomatiser les relations d'équivalence qui ont une infinité de classes d'équivalences, chacune d'entre elles étant infinie.

3. On pose $\mathfrak{M} = \langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, E \rangle$, où E est interprétée par $E((a,b),(c,d))$ si et seulement si $a = c$. Montrer que $\mathfrak{M}$ est modèle de la théorie considérée.

4. Montrer que cette théorie n'a qu'un modèle dénombrable à isomorphisme près.

5. En déduire que la théorie est complète.

6. Considérons un cardinal infini κ non dénombrable. Cette théorie n'a-t-elle encore qu'un modèle de cardinalité κ à isomorphisme près?

7. Soit $m > 0$ un entier fixé. Axiomatiser les relations d'équivalences qui ont une infinité de classes, chacune d'entre elles ayant exactement m éléments. Cette théorie est-elle complète? A-t-elle pour tout cardinal infini un seul modèle de cette cardinalité à isomorphisme près?

8. Axiomatiser les relations d'équivalences qui ont exactement m classes, chacune d'entre elles étant infinie. Cette théorie est-elle complète? A-t-elle pour tout cardinal infini un seul modèle de cette cardinalité à isomorphisme près?

Exercice 12. Une théorie est *modèle-complète* si tout plongement (i.e. $\mathcal{L}$-morphisme) d'un modèle dans un autre est élémentaire. Soient T et T' deux théories modèle-complètes dans un même langage $\mathcal{L}$, telles que tout modèle de T s'injecte dans un modèle de T', et tout modèle de T' s'injecte dans un modèle de T. Montrer que T et T' sont équivalentes.

[Indication: Utiliser une réunion de chaîne.]