Maîtrise de Mathématiques
Logique et Complexité (Année 2003-2004)
TD 3

Exercice 1. Soit T une théorie et φ un énoncé tel que $T \models \varphi$. Montrer qu'il existe une partie finie $T' \subseteq T$ telle que $T' \models \varphi$.

Exercice 2. Montrer qu'une théorie T qui a des modèles finis arbitrairement grands a un modèle infini.

Exercice 3.

1. Démontrer qu'il n'y a pas d'ensemble $\Phi(x)$ de $\mathcal{L}_{gp}$-formules tel que dans tout groupe G un élément g satisfait $\Phi(x)$ si et seulement si l'ordre de g est fini.

2. Peut-on axiomatiser les groupes de torsion ?

Exercice 4. Soit T la théorie de $\langle \mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot \rangle$. Montrer qu'il existe un modèle de T contenant $\mathbb{N}$ et un élément a non nul divisible par tout entier standard non nul.

Exercice 5. Démontrer qu'il n'y a pas d'ensemble $\Phi(x)$ de $\mathcal{L}_{ann}$-formules tel que dans tout corps K un élément a satisfait $\Phi(x)$ si et seulement s'il est algébrique sur le corps premier (c'est-à-dire, satisfait une équation polynômiale non-triviale à coefficients entiers).

Exercice 6. Soit T une théorie finie, T_1 et T_2 deux ensembles d'énoncés tels que $T_i \models T$ (pour $i = 1, 2$), et tout modèle de T est soit modèle de T_1 soit modèle de T_2 mais pas des deux. Montrer que T_1 et T_2 sont finiment axiomatisables.
(Indication : Considérer $T \cup T_1 \cup T_2$.)

Exercice 7. Soient $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$ trois structures telles que $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}_1$, et $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}_2$. Montrer qu'il existe $\mathfrak{N}$ telle que $\mathfrak{N}_1 \prec \mathfrak{N}$, et $\mathfrak{N}_2$ s'injecte élémentairement dans $\mathfrak{N}$ sur $\mathfrak{M}$ (autrement dit, il existe $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}_2' \prec \mathfrak{N}$, où $\mathfrak{N}_2'$ est une structure isomorphe à $\mathfrak{N}_2$ sur $\mathfrak{M}$).

Exercice 8.

1. Existe-t-il une théorie des relations d'équivalence n'ayant que des classes finies ?

2. Existe-t-il une théorie des relations d'équivalence n'ayant qu'un nombre fini de classes ?

3. La théorie des relations d'équivalences ayant une infinité de classes infinies est-elle finiment axiomatisable ?

Exercice 9. Soit κ un cardinal. Une théorie est dite κ-catégorique si elle a un unique modèle à isomorphisme près de cardinal κ.
Montrer le théorème de Vaught : si T est une théorie qui n'a que des modèles infinis et

qui est κ-catégorique pour un cardinal infini supérieur ou égal au cardinal du langage, alors T est complète.

Exercice 10.

1. Donner une axiomatisation de la théorie des groupes abéliens divisibles sans torsion.
2. Soit G un modèle de T (groupe noté multiplicativement) et θ_n la fonction de G dans G qui à x associe x^n. Montrer que θ_n est bijective.
3. Montrer qu'on peut munir tout modèle de T d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.
4. Montrer que T est $\aleph_1$-catégorique. (On admettra que si un espace vectoriel infini sur un corps K est de cardinal strictement supérieur à celui de K alors son cardinal est égal à sa dimension.)
5. En déduire que T est complète.
6. La théorie T est-elle $\aleph_0$-catégorique ?