Maîtrise de Mathématiques
Logique et Complexité (Année 2003-2004)
TD 4

Exercice 1. Soit T la théorie des ordres discrets sans extrémités.

1. Montrer qu'un isomorphisme local entre deux modèles de T est un $(k+1)$-isomorphisme si et seulement si les distances $\leq 2^k$ sont conservées.
2. En déduire que deux modèles quelconques $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ de T sont k-isomorphes pour tout k.
3. En déduire que T est complète.

Exercice 2. Théorie des modèles finis

1. Dans le langage $\{=\}$, montrer que deux structures de cardinal $\geq m$ sont m-isomorphes.
2. Montrer qu'il n'existe pas de formule de rang de quantification $< m$ qui exprime que le cardinal de la structure est $\geq m$.

Exercice 3 (Va et vient infini).
Un ∞-*isomorphisme* de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$ est un isomorphisme local de M dans N qui est un α-isomorphisme pour tout ordinal α.
Une *famille karpienne* d'isomorphismes locaux de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$ est une famille **non vide** $\mathcal{F}$ d'isomorphismes locaux telle que :

- **va** : pour tout $\sigma \in \mathcal{F}$ et tout $a \in M$, il existe $\tau \in \mathcal{F}$ prolongeant σ tel que $a \in \mathrm{Dom}; \tau$.
- **vient** : pour tout $\sigma \in \mathcal{F}$ et tout $b \in N$, il existe $\tau \in \mathcal{F}$ prolongeant σ tel que $b \in \mathrm{Im}\, \tau$.
  On dit que $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ se correspondent pas va et vient infini s'il existe une famille karpienne de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$.

1. Montrer que tout élément d'une famille karpienne est un ∞-isomorphisme.
2. Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ deux structures. Montrer qu'il existe un cardinal κ tel que tout κ-isomorphisme est un ∞-isomorphisme.
3. Montrer que si l'ensemble des ∞-isomorphismes de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$ est non vide alors il forme une famille karpienne. En déduire que $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ se correspondent par va et vient infini si et seulement si elles sont ∞-isomorphes.
4. Montrer que deux structures ω-saturées $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont élémentairement équivalentes si et seulement si elles se correspondent par va et vient infini. (On pourra considérer l'ensemble des isomorphismes locaux dont le domaine et l'image satisfont exactement les mêmes formules.)

Exercice 4 (Graphe aléatoire). On se place dans un langage muni d'une relation binaire R. Une structure dans ce langage sera sensée représenter un graphe ; $R(x, y)$ signifie x est relié à y. On considère un graphe symétrique non vide tel qu'aucun point n'est relié à lui-même et tel que pour chaque ensembles finis X_1 et X_2 de sommets il existe un sommet relié à tous les sommets de X_1 et à aucun sommet de X_2.

1. Axiomatiser ce comportement.
2. Montrer que le graphe est nécessairement infini.
3. Montrer que tout isomorphisme local est un ∞-isomorphisme.
4. Conclure que la théorie est complète, et que les modèles dénombrables sont isomorphes.
5. Montrer que tous les modèles sont ω-saturés.

Exercice 5.

1. Axiomatiser la théorie T de la relation d'équivalence qui pour chaque entier $n > 0$ a une et une seule classe de cardinal n.
2. Montrer par un argument de compacité que tout modèle de T a une extension élémentaire qui a une infinité de classes toutes infinies.
3. Montrer que deux modèles de T à une infinité de classes toutes infinies se correspondent par un va et vient infini.
4. En déduire que T est complète.
5. Quels sont les modèles ω-saturés de T?