Maîtrise de Mathématiques
Logique et Complexité (Année 2003-2004)
TD 5

Exercice 1. On se place dans le langage des groupes, et on s'intéresse à la théorie des groupes vérifiant $\forall x\ x^5 = x$. Eliminer, si possible, les quanteurs dans les formules :

- $\exists y\ x = y \cdot x$
- $\forall y\ y = y \cdot x$
- $\exists y\ y = y \cdot x$
- $\exists y\ x = y \cdot y$
- $\exists z\ x \neq z \wedge \forall y\ x = y \cdot x$
- $\exists y\ x = y \cdot y \cdot y$

Exercice 2. Soient une théorie T et un ensemble de formules Φ. Montrer que Φ est un ensemble d'élimination pour T si et seulement si pour tous modèles ω-saturés $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ de T,

$$\mathcal{F} = \{\bar{m} \to \bar{n} : \text{ pour } \bar{m} \in \mathfrak{M}, \bar{n} \in \mathfrak{N} \text{ satisfaisant les mêmes formules de } \Phi\}$$

est soit vide, soit une famille karpienne d'isomorphismes locaux.

Exercice 3. Montrer que la théorie des ordres denses sans extrémité est complète, élimine les quantificateurs et que tous ses modèles sont ω-saturés.

Exercice 4. Soit T la théorie des ordres discrets sans extrémité.

1. Pour tout $n \geq 0$, écrire la formule $\phi_n(x, y)$ signifiant que la distance de x à y vaut n.
2. Montrer que $\Phi = \{(x < y); \phi_n(x, y) : n \in \omega\}$ est un ensemble d'élimination pour T.
3. On ajoute au langage $\mathcal{L} = \{<\}$ une fonction unaire S et on considère la théorie
$$T' = T \cup \{\forall x \forall y S(x) = y \leftrightarrow (x < y \wedge \neg \exists z x < z < y)\}.$$
4. Montrer que tout modèle $\mathfrak{M}$ de T s'étend de façon unique en un modèle $\mathfrak{M}'$ de T'.
5. Montrer que toute $\mathcal{L}'$-formule est équivalente modulo T' à une $\mathcal{L}$-formule.
6. Montrer que T' élimine les quanteurs.

Exercice 5. Donner un exemple d'une théorie modèle-complète incomplète.
Remarque : On verra dans le chapitre suivant que la théorie des corps algébriquement clos est modèle-complète sans être complète (il manque uniquement la caractéristique du corps). Nous demandons évidemment ici un autre exemple.

Exercice 6. Soit T la théorie de la relation d'équivalence qui pour chaque entier $n > 0$ a une et une seule classe de cardinal n. (cf TD4 exo 5.)

1. Montrer que T n'est pas modèle complète.
2. Déterminer un ensemble d'élimination pour T.

3. Soient $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ deux modèles de T. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$.

Exercice 7. Soit T une théorie. On ajoute au langage $\mathcal{L}$ les relations n-aires R_ϕ pour toute $\mathcal{L}$-formule ϕ n-aire, obtenant ainsi le langage $\mathcal{L}'$. On considère la théorie T' :

$$T' = T \cup \{\forall x_1 \dots x_n \ [\phi(x_1 \dots x_n) \leftrightarrow R_\phi(x_1 \dots x_n)] \ : \ \phi \text{ une } \mathcal{L}\text{-formule}\}$$

1. Montrer que tout modèle $\mathfrak{M}$ de T s'étend de façon unique en un modèle $\mathfrak{M}'$ de T'.

2. Montrer que toute $\mathcal{L}'$-formule est équivalente modulo T' à une $\mathcal{L}$-formule.

3. Montrer que T' élimine les quanteurs.

4. Montrer que T est modèle-complète si et seulement si

$$\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \implies \mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{N}'.$$

Remarque : Dans cet exercice, nous avons démontré que, quitte à changer le langage, on peut transformer une théorie en une théorie modèle-complète, mais qui n'a plus nécessairement les mêmes inclusions de modèles. En fait, quitte à perdre certains modèles, mais cette fois-ci en restant dans le même langage, on peut parfois obtenir à partir d'une théorie une nouvelle théorie, dite sa modèle-complétion.

Exercice 8. On appelle modèle-complétion d'une théorie T une théorie $T^\star$ avec $T \subset T^\star$ telle que pour tout modèle $\mathfrak{M}$ de T

- Il existe un modèle de $T^\star$ qui contient $\mathfrak{M}$;

- Tous les modèles de $T^\star$ qui contiennent $\mathfrak{M}$ sont élémentairement équivalents dans $\mathcal{L}(M)$.

1. Montrer que $T^\star$ est modèle-complète.

2. Montrer qu'il n'existe qu'une seule modèle-complétion (c'est à dire : deux modèle-complétions de T sont équivalentes).

3. Montrer qu'une théorie complète non modèle-complète n'admet pas de modèle-complétion. En donner un exemple.

Exercice 9. On se place dans le langage de la théorie des ordres.

1. Donner un exemple d'une chaîne avec maximum ayant une restriction sans maximum.

2. Donner un exemple d'une chaîne sans maximum ayant une restriction avec maximum.

3. Montrer que l'énoncé $\forall x \exists y \ x < y$ n'est équivalent à aucun énoncé universel ni à aucun énoncé existentiel.